ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ПРОБЛЕМЫ СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ.

СБОРНИК ТРУДОВ
молодых ученых и специалистов ВНИИСИ

Выпуск 1

МОСКВА 1978

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I. Проблемы социальных и экономических систем

М. Ю. Рю. К вопросу о динамике контрастности городского расселения . . 5

Щербов С. Я. Об учете возрастно-половой структуры населения в глобальных моделях 10

Алферьева Л. Л. Научно-технический прогресс: проблемы планирования и экономического стимулирования 16

Раздел II. Модели исследования операций

С. И. Травкин, В. Н. Якимец. Формирование сбалансированных многопараметрических систем 22

О. Г. Голиченко. Проблема оценки ожидаемой информации в процессах принятия решений 28

Н. Н. Миловидов. Математическая модель системы средств автоматики с переменной структурой 39

Ю. Г. Кругов, С. В. Голованов. Подход к выбору оптимального состава и характеристик многоцелевых технических комплексов 43

М. Ш. Байбатшаев. Синтез одного класса систем с двоичной нелинейной последовательностной машиной для управления непрерывным объектом . . 48

Раздел III. Математическое программирование и программное обеспечение ЭВМ

V *А. В. Карзанов, М. В. Ломоносов.* Системы потоков в неориентированных сетях 59

А. Б. Ядыкин, А. И. Зинина. Об одной схеме преобразования базисных треугольных множителей в мультипликативном симплекс-методе 66

В. Е. Кривоножко, Л. Г. Левченкова. Декомпозиция задач динамического линейного программирования с фазовыми ограничениями блочной структуры . 75

М. Е. Фурман. Структурная организация программного обеспечения иерархических баз данных 82

РАЗДЕЛ III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ

А. В. Карзанов, М. В. Ломоносов

СИСТЕМЫ ПОТОКОВ В НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ СЕТЯХ

Введение

Задачи о потоках в сетях составляют важный раздел дискретной математики с многочисленными приложениями к экономике и технике. Как правило, эти задачи линейны, и поэтому к ним применимы общие методы линейного и целочисленного программирования. Однако в тех случаях, когда к ним применен физически более наглядный комбинаторно-сетевой подход, потоковые задачи решаются гораздо эффективнее. К тому же сферы приложения этих задач нуждаются не только (и даже не столько) в получении точных численных ответов, сколько в качественном понимании структуры потоков, реализующих тот или иной вид требований, и характера «узких мест», ограничивающих эксплуатационные возможности сетей.

Развитие теории потоков и комбинаторно-сетевых методов решения потоковых задач началось со ставшей классической задачи о максимальном потоке (Л. Форд, Д. Фалкерсон [1]), к настоящему времени один поток в сети достаточно хорошо изучен [1—3]. Однако задачи о нескольких разнородных потоках (или о «многопродуктовом потоке»), представляющие для практики, пожалуй, наибольший интерес, до сих пор почти не поддавались решению комбинаторными методами. Это объясняется объективной трудностью многопотоковых задач, основная масса которых по комбинаторной сложности приближается к универсальным переборным или LP-задачам; в особенности это относится к задачам на ориентированных сетях.

В настоящей работе полностью описываются классы многопотоковых задач на неориентированных сетях, решение которых определяется препятствием типа Форда—Фалкерсона — разрезом или семейством разрезов. Все результаты приводятся без доказательства.

Постановка задач и основные результаты работы

Пусть V — конечное множество вершин и $c=c[x, y]$ — неотрицательная функция пропускной способности на множестве всех неупорядоченных пар различных вершин $[x, y]$. Объект (V, c) называется (неориентированной) *потоковой сетью*, а $E=\{e=[x, y] : c[x, y]>0\}$ — множеством ребер сети. Неотрицательная функция $f_{st}(x, y)$ на множестве всех упорядоченных пар вершин (x, y), удовлетворяющая условиям неразрывности

$$\operatorname{div}_{f_{st}}(x)=\sum_{y\in V} f_{st}(x, y)-\sum_{y\in V} f_{st}(y, x)=0, \quad x\in V\setminus\{s, t\} \tag{1}$$

называется (двухполюсным) *потоком*. Вершины s и t называются *полюсами* потока f_{st}, а величина $\|f_{st}\| \equiv |\mathrm{div}_{f_{st}}(s)| = |\mathrm{div}_{f_{st}}(t)|$ — его *мощностью*. Полюс, в котором $\mathrm{div}_{f_{st}}$ положительно, называется *источником*, другой полюс — *стоком* потока f_{st}. Если в паре $\{s, t\}$ полюс s есть источник, а t — сток, то будем говорить, что поток f_{st} направлен от s к t; переход от f_{st} к функции $\overline{f}_{st}$ такой, что $\overline{f}(x, y) = f(y, x)$ называется переориентацией потока.

Пусть $S = (P, U)$ — неориентированный граф с множеством вершин (полюсов) $P \subseteq V$. Семейство потоков $F = \{f_{st} : [s, t] \in U\}$ называется *мультипотоком* в сети (V, c) с потоковой схемой S*, если справедливы неравенства

$$\sum_{[s,t] \in U} (f_{st}(x, y) + f_{st}(y, x)) \leqslant c[x, y], \quad \forall [x, y], \tag{2}$$

(означающие, что «объем перевозок» по ребру ограничен его пропускной способностью). В рассматриваемых задачах направления потоков несущественны, и в процессе решения отдельные потоки можно переориентировать из соображений удобства. Наряду с обозначением f_{st} будет применяться обозначение f_u, где $u = [s, t] \in U$.

Теория мультипотоков строится, в основном, вокруг задач двух видов.

А. Задача допустимости. Даны: сеть (V, c) и граф $S = (P, U)$ без изолированных вершин с определенной на U *функцией требований* $b = b(u)$. Спрашивается, существует ли в сети (V, c) мультипоток $F = \{f_u;\ u \in U\}$ со схемой S, удовлетворяющий условиям $\|f_u\| = b(u)$, $u \in U$ (или более сильная задача: построить такой поток, т. е. осуществить в сети «перевозки заданных объемов»).

В. Экстремальная задача. Даны: сеть (V, c) и граф $S = (P, U)$ без изолированных вершин. Построить мультипоток $F = \{f_u;\ u \in U\}$, максимизирующий линейный функционал вида $\sum_{u \in U} l_u(f_u)$.

Среди экстремальных задач естественно выделить задачи с функционалом $\|F\| = \sum_{u \in U} \|f_u\|$, или задачи на $\max \Sigma$ (в которых нас интересует лишь общий «объем перевозок»). Простейшей задачей на $\max \Sigma$ является задача Форда — Фалкерсона о максимальном потоке; ее потоковая схема состоит из одного ребра.

На вопрос о разрешимости задачи **А** сначала был дан ответ в виде критерия О. Кеньи и К. Осаму [4], строго доказанного М. Ири [5], Б. А. Папернов [6] придал ему следующий вид (см. также [7]).

Теорема 1 [6, 7]. Для разрешимости задачи **А** необходимо и достаточно, чтобы для любой метрики $\mu = \mu[x, y]$ на множестве V (т. е. функции, удовлетворяющей неравенству треугольника $\mu[x, y] + \mu[y, z] \geqslant \mu[x, z]$, $x, y, z \in V$ выполнялось неравенство

$$(\mu, b) \leqslant (\mu, c), \tag{3}$$

где $(\mu, b) = \sum_{u \in U} \mu(u) b(u)$ и $(\mu, c) = \sum_{e \in E} \mu(e) c(e)$.

Для задач на $\max \Sigma$, используя теорию двойственности линейного программирования, получаем следующую теорему.

* Употребляются также термины «многопродуктовый поток» и «граф потоковых отношений» [3].

Теорема 2

$$\max \| F \| = \min (\mu, c), \tag{4}$$

где минимум берется по всем метрикам μ, устанавливающим расстояние не менее 1 между любой парой полюсов $s, t \in P$ такой, что $[s, t] \in U$.

Важный класс метрик образует *разрезы* и их положительные линейные комбинации. Пусть X и Y — непустые подмножества вершин такие, что $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \varnothing$. Разрезом $R = [X, Y]$ мы будем называть одновременно: 1) разбиение вершин на подмножества X, Y; 2) множество ребер $[x, y]$ таких, что $x \in X$, $y \in Y$; 3) функцию $R = R[x, y]$, равную 1, если $x \in X$, $y \in Y$, и равную 0, если $\{x, y\} \subseteq X$ или Y. Нетрудно видеть, что разрез в смысле определения 3 есть метрика.

Для произвольной функции $\gamma = \gamma[x, y]$, определенной на некотором подмножестве H пар $[x, y]$, символ $\gamma(R)$ будет обозначать сумму

$$\sum_{[x, y] \in H} \gamma[x, y] R[x, y] = \sum_{[x, y] \in [X, Y]} \gamma[x, y].$$

Для разреза R соотношение (3) принимает вид

$$b(R) \leqslant c(R). \tag{5}$$

Определение 1 [6]. Схема S называется разредзной для задачи **А**, если независимо от сети, т. е. от числа вершин и функции c, и при любых значениях $b(u)$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения неравенств (5) для всех разрезов R на V.

Определение 2. Схема S называется *разрезной для задачи на* $\max\Sigma$, если независимо от сети соотношение (4) сохраняется для подкласса метрик μ, представимых неотрицательной линейной комбинацией разрезов.

Комбинаторное исследование мультипотоков началось с двух наиболее простых случаев: а) задач на $\max\Sigma$ и на допустимость для двух потоков (Т. Ху [2]); б) задачи на $\max\Sigma$ с потоковой схемой K_n, т. е. полным графом произвольного размера (В. Л. Куперштох [8], Б. В. Черкасский [9]) — эту важную задачу мы называет далее *свободной* задачей на $\max\Sigma$. К задаче Т. Ху сводится задача о допустимости со схемой, представимой в виде объединения $Z_k \cup Z_l$ двух звезд (Е. А. Диниц [3]), а к свободной задаче — задача на $\max\Sigma$, схема которой — полный n-хроматический граф [9]. Наконец, Черкасский [10] решил задачи на $\max\Sigma$ со схемами, составленными из двух полных двудольных графов специальным образом; для общего расположения таких графов он высказал гипотезу о характере правой части равенства (4), справедливость которой следует из теоремы 5. Потоковые схемы всех перечисленных задач разрезные. Б. А. Папернов [6] доказал (не указав алгоритма решения), что для задач о допустимости разрезными будут, кроме схем типа «две звезды», только две схемы: K_4 (полный граф с четырьмя вершинами) и C_5 (цикл длины 5).

Авторами получены следующие результаты.

I. Предложен метод преобразования мультипотоков, названный D-операцией, пригодный для решения всех разрезных задач — как на допустимость, так и на $\max\Sigma$. Идея метода обсуждается ниже.

II. Для любой задачи о допустимости с разрезными потоковыми схемами (т. е. схемами вида «две звезды», K_4 и C_5) предложены эффективные* комбинаторно-сетевые алгоритмы. Кроме того, конструктивно доказывается следующая теорема.

* Т. е. имеющие полиноминальную от $|V|$ асимптотическую оценку числа действий.

Теорема 3. Рассмотрим задачу о допустимости с разрезной схемой S и целочисленными функциями c и b. Тогда

1) если задача разрешима, то существует (и гарантируется алгоритмом) полуцелочисленное решение;

2) если, кроме того, функция $c—b$, где b продолжено нулем на остальные пары вершин, имеет с каждым разрезом четное скалярное произведение, то существует целочисленное решение.

Для получения целочисленного решения в случае 2 предложена специальная модификация алгоритма, обладающая лишь условной эффективностью.* Схемы указанных алгоритмов, основанных на D-операции, изложены ниже.

III. Для задач на $\max\Sigma$ доказана следующая теорема. Будем говорить, что граф S удовлетворяет условию *слабого зацепления*, если любая его вершина принадлежит не более чем двум кликам (т. е. максимальным полным подграфам) дополнительного графа $\overline{S}$.

Теорема 4. Пусть граф S не имеет изолированных вершин $\overline{S}=(P, \overline{U})$ — граф, дополнительный к S (т. е. $[x, y]\in\overline{U}\Leftrightarrow[x, y]\notin U$). Тогда

1) схема S — разрезная для задачи на $\max\Sigma$, если и только если она удовлетворяет условию слабого зацепления;

2) если S удовлетворяет условию слабого зацепления и функция c целочисленна, то существует 1/4 — целочисленное решение;

3) если, кроме того, любой цикл из клик графа $\overline{S}$ четный (две клики смежны, если они имеют общую вершину), то существует полуцелочисленное решение.

Класс разрезных задач на $\max\Sigma$ оказался, таким образом, значительно шире, чем для задач о допустимости. Теорема 4 доказывается конструктивно при помощи единого алгоритма, решающего все задачи на $\max\Sigma$, для которых выполнено условие слабого зацепления. Основные этапы этого алгоритма будут обсуждаться далее. Доказательство необходимости условия слабого зацепления получено А. В. Карзановым и П. А. Певзнером. Оно потребовало рассмотрения всего лишь 17 схем, для которых это условие нарушено.

Алгоритм решения разрезных задач на $\max\Sigma$ конечен для целочисленных сетей и является условно-эффективным.

Преобразование мультипотоков

До сих пор мультипотоковые задачи решались с помощью монотонного наращивания мощностей потоков. Мы применяем метод перестроек, состоящий в следующем.

Потоковая схема $S=(P, U)$ «погружается» в более простую схему $\tilde{S}=(P, \tilde{U})$, $U\subseteq\tilde{U}$ (например, в полный граф). Пусть $\tilde{F}$ — некоторый мультипоток в сети (V, c) со схемой $\tilde{S}$. Разложим $\tilde{F}$ на подсемейства $F_a=\{f_u; u\in U\}$ и $F_p=\{f_u; u\in\tilde{U}\setminus U\}$, состоящие, соответственно, из *истинных* и *паразитных* потоков. Для задачи о допустимости поток $f_u\in F_a$ назовем *избыточным*, если $\|f_u\|>b(u)$. «Полезные» свойства мультипотока $\tilde{F}$ характеризуются величиной M, равной $\|F_a\|$ для задачи на $\max\Sigma$ и $\sum\limits_{u\in U}\min\{b(u), \|f_u\|\}$ для задачи о допустимости.

---

* Т. е. допускающая асимптотическую оценку числа действий вида $O(\|F\|\cdot\mathscr{R}(|V|))$ или $O(\min(\sum\limits_{e\in E} c(e), \sum\limits_{u\in U} b(u))\cdot\mathscr{R}(/V/)$, где $\mathscr{R}$ — полином.

Все рассматриваемые нами алгоритмы имеют общий предварительный этап — решение задачи на $\max\Sigma$ со схемой $\tilde{S}$. На каждой из последующих итераций мультипоток $\bar{F}$ с помощью специальных процедур перестраивается с увеличением M. Эти процедуры таковы, что невозможность с их помощью увеличить M приводит в случае задачи **А** к построению разреза R такого, что $c(R)<b(R)$, а для задачи на $\max\Sigma$ — к построению метрики $\mu=\Sigma\alpha_i R_i$ такой, что $\|F_a\|=(\mu, c)$.

Основной процедурой служит так называемая D-операция, которую мы схематично опишем для целочисленных сетей. Пусть в каждый момент все потоки представлены цепными разложениями [1] $f_u=\sum_L \beta(L)\theta_L$, где L — путь из источника потока f_u в его сток, θ_L — характеристическая функция множества дуг пути L и $\beta(L)>0$ (мы считаем, что потоковые циклы в разложении отсутствуют). Путь L назовем нитью потока f_u, а $\beta(L)$ — ее мощностью. Будем считать выполненным следующее условие (1):

а) мощности всех потоковых нитей одинаковы и равны 1/2;

б) величина $\Delta c[x, y]\equiv c[x, y]-\sum\limits_{u\in U}(f_u(x, y)+f_u(y, x))$ целая для всех $[x, y]\in E$.

Пусть B *(база D-операции)* и Q *(объемлющее множество)* — подмножества полюсов такие, что $B\subseteq Q\subset P$. Поток f_{st} назовем: а) *базовым*, если $s, t\in B$; б) *внутренним*, если $s, t\in Q$; в) *внешним*, если $s, t\in\bar{Q}=P\setminus Q$ и г) *исходящим*, если один из полюсов s, t принадлежит Q, а другой — $\bar{Q}$. Обозначим через F_B, F_Q, $F_{\bar{Q}}$, $F_{Q\bar{Q}}$ семейства базовых, внутренних, внешних и исходящих потоков соответственно. *Областью* $N(f_u)$ потока f_u назовем пару его полюсов вместе со всеми вершинами, лежащими на его нитях. Пусть N_B, N_Q, $N_{\bar{Q}}$ — объединения областей потоков из F_B, F_Q, $F_{\bar{Q}}$ соответственно. Переориентируем, если надо, исходящие потоки так, чтобы их источники принадлежали Q. *Активным путем* назовем простой (быть может, вырожденный) путь J_{xy} (начало — $x\in N_B\cup B$, конец — y), такой, что для любой его дуги (z, w) либо $\Delta c[z, w]>0$, либо $f_u(w, z)>0$ для некоторого $f_u\in F_{Q\bar{Q}}$, либо через $[z, w]$ проходит нить внутреннего потока. Активный путь является обобщением увеличивающего пути Форда — Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, когда $B=Q=\{s\}$, а $\bar{Q}=\{t\}$. Активный путь J_{xy} позволяет, пользуясь условием 1, так перестроить внутренние и исходящие потоки, чтобы, во-первых, возникли две «нити» L_{py}, L_{qy}, идущие из Q в вершину y и, во-вторых, сохранилось $\|F_{Q\bar{Q}}\|$, а $\|F_Q\|$ либо сохранилось, либо уменьшилось на 1/2. Такая перестройка вдоль пути J_{xy} осуществляется, как правило, несколькими способами. Если теперь $y\in\bar{Q}$, то очевидным образом можно увеличить $F_{Q\bar{Q}}$. Если $y\in N_{\bar{Q}}$ и L_{st} — проходящая через y нить внешнего потока, то, «разорвав» L_{st} в вершине y, можно образовать нити L_{ps} и L_{qt} или нити L_{pt} и L_{qs}, что увеличит $\|F_{Q\bar{Q}}\|$ на единицу за счет $F_{\bar{Q}}$ и, быть может, F_Q.

Множество $T(B, Q)$ вершин y, достижимых активными путями, строится методом расстановки пометок. Расстановка пометок, выбор некоторого активного пути J_{xy}, где $y\in N_{\bar{Q}}\cup\bar{Q}$, перестройка F_Q и $F_{Q\bar{Q}}$ вдоль J_{xy}, завершающая «перевязка» нитей в вершине y и составляют вместе D-операцию. D-операция относительно B, Q невозможна, если $T(B, Q) \cap (N_{\bar{Q}} \cup \bar{Q}) = \varnothing$ (т. е. вершины из $N_{\bar{Q}} \cup \bar{Q}$ недостижимы).

Будем говорить, что разрез $R = [X, Y]$ и мультипоток F *согласованы*, если все ребра $[x, y] \in [X, Y]$ насыщены мультипотоком F и любая нить F имеет с R не более одного общего ребра. Из этого определения следует, что $c(R) = \sum\limits_{[s,t] \in [X,Y]} \| f_{st} \|$.

Лемма 1. Если D-операция относительно B и Q невозможна, то разрез $R_{BQ} = [T(B, Q), V \setminus T(B, Q)]$ согласован с мультипотоком $F_{Q\bar{Q}}$.

В рассматриваемых алгоритмах каждое применение D-операции либо увеличивает M, либо строит согласованный разрез. Эта операция сохраняет также условие 1.

Замечание. T — операция Б. В. Черкасского [9], введенная для решения свободной задачи, есть частный случай D-операции при $B = Q = \{p\}$, где $p \in P$.

Решение разрезных задач о допустимости

По теореме Б. А. Папернова [6] для задач о допустимости разрезными являются только схемы K_4, C_5 и «две звезды». В последнем случае задача сводится к двум потокам [3], т. е. к частному случаю схемы K_4. Поэтому мы рассмотрим только схемы K_4 и C_5. Будем считать выполненным условие 1.

Определим $b_p = \sum\limits_{q \in P \setminus \{p\}} b[p, q]$. Выберем в качестве $\tilde{S}$ соответственно K_4 и K_5^* и рассмотрим более слабые задачи, заменив требования $\|f_u\| = b(u)$ условиями

$$\sum_{q \in P \setminus \{p\}} \|f_{pq}\| = b_p, \quad p \in P. \qquad (6)$$

Эти задачи решаются как и свободные задачи на maxΣ с множеством полюсов $P' = \{p'\}$ в сети, полученных из (V, c) добавлением полюсов p' и ребер $[p', p]$, $p \in P$, пропускной способности $c[p', p] = b_p$. Если соотношение (6) оказалось невыполненным для некоторого полюса p, то, применяя теорему Куперштоха — Черкасского [8, 9] (или лемму 1), получим разрез R_p, для которого $c(R_p) < b_p = b(R_p)$, означающий, что задача неразрешима.

Пусть мультипоток F, удовлетворяющий соотношению (6), построен. Можно показать, что отсутствие в $\tilde{F}$ избыточных (для K_4) или паразитных (для C_5) потоков f_{st} означает, что $\tilde{F}$ есть решение исходной задачи. Если такой поток f_{st} существует, то производится D-операция с $B = Q = \{s, t\}$ (в этом случае она совпадает с H-операцией, введенной в работе [11]), которая либо увеличит M (уменьшив $\|f_{st}\|$), либо укажет разрез R_{st}, разделяющий $\{s, t\}$ и $P \setminus \{s, t\}$ такой, что $c(R_{st}) < b(R_{st})$.

Описанный алгоритм условно-эффективен: число его итераций «пропорционально» $\|F\|$. Модификация D-операции, связанная с выбором кратчайшего активного пути и работающая с нитями разной мощности, позволяет получить эффективный алгоритм, причем для сетей не обязательно целочисленных.

* Схему «два ребра» рациональнее погрузить в C_4.

Решение разрезных задач на $\max\Sigma$

Пусть схема S удовлетворяет условию слабого зацепления. В качестве $\tilde{S}$ берется полный n-хроматический граф, получаемый из полного графа на вершинах P удалением всех ребер $[s, t]$ таких, что $\{s, t\}$ лежит в пересечении двух клик графа $\tilde{S}$. Сеть (V, c) предполагаем целочисленной.

На предварительном этапе строится решение задачи на $\max\Sigma$ со схемой $\tilde{S}$, удовлетворяющее условию 1* (например, при помощи алгоритма работы [9]). На первом этапе предварительное решение преобразуется в решение $\tilde{F}$ задачи с такой же схемой $\tilde{S}$, которому соответствует максимально возможное значение $\|F_a\|$. Это достигается следующим применением D-операции. Выбирается (и принимается за Q) клика CL графа $\tilde{S}$, для которой имеется мультипоток $F_Q=\{f_{st};\ s,\ t\in Q\}$ (паразитные потоки) положительной мощности $\|F_Q\|$; за базу B принимается множество полюсов всех ненулевых потоков из F_Q. Можно показать, что всякий раз, когда D-операция возможна, ее можно провести так, чтобы увеличить $\|F_a\|$; для этого существенно условие слабого зацепления.

Лемма 2. Если D-операция невозможна ни для какой клики CL, то для каждой клики CL определен согласованный с $\tilde{F}$ разрез R_{CL}, разделяющий CL и $P\setminus CL$, и $\|F_a\|$ максимально на множестве всех решений задачи на $\max\Sigma$ со схемой $\tilde{S}$.

Если после первого этапа не осталось ненулевых паразитных потоков, то, очевидно, $\tilde{F}$ и есть решение исходной задачи. В противном случае проводится второй этап — самый трудоемкий. Идея второго этапа состоит в том, что дальнейшего увеличения $M=\|F_a\|$ можно достигнуть, «сращивая» попарно нити паразитных потоков, относящихся к соседним кликам графа $\tilde{S}$, в одну нить истинного потока, образуя так называемый *транзит*. В этот момент $\tilde{F}$ перестает быть решением экстремальной задачи со схемой $\tilde{S}$. Каждое увеличение числа транзитов представляет собой задачу на специальном *графе возможных транзитов*, являющуюся непрерывным аналогом известной задачи о построении в графе максимального подграфа при ограничениях на степени его вершин [12]. Для решения такой задачи существенно: образуют или нет нечетные циклы клики графа $\tilde{S}$, наличие нечетного цикла из клик может потребовать создания транзитов мощности 1/4. Для построения графа возможных транзитов и самих транзитов применяется D-операция, перестраивающая потоки в множествах X_{CL} разрезов $R_{CL}=[X_{CL}, Y_{CL}]$, где $CL\subseteq X_{CL}$. Исходная задача будет решена в тот момент, когда увеличение числа транзитов станет невозможным; построенная в процессе решения совокупность согласованных с F_a разрезов $\mathcal{R}=\{R_i\}$ порождает метрику $\mu=\Sigma\alpha_i R_i$ такую, что $\mu[s, t]\geqslant 1$ для всех $[s, t]\in U$ и $\|F_a\|=(\mu, c)$.

Теорема 5. Пусть F — решение задачи на $\max\Sigma$ в сети $(V, c$ со схемой S, удовлетворяющей условию слабого зацепления. Тогда существует метрика $\mu=\Sigma\alpha_i R_i$ (R_i — разрезы, согласованные с F), такая, что $\|F\|=(\mu, c)$, все $\alpha_i=1/2$, если клики графа $\tilde{S}$ образуют только четные циклы, и $\alpha_i=1/2$ или 1/4 в общем случае.

Для целочисленных сетей эта теорема следует из рассмотренного алгоритма. Для произвольных сетей ее можно доказать предельным

* Обычно $\tilde{S}$ — полный n-хроматический граф.

переходом. Из теоремы 5 следует, в частности, утверждение, высказанное Б. В. Черкасским в работе [10] в виде гипотезы.

Теорема 6. Пусть F — решение задачи на $\max\Sigma$ в сети (V, c) с потоковой схемой $S = K(S', T') \cup K(S'', T'')$, где S', S'', T', T'' — подмножества полюсов, а $K(S', T')$ и $K(S'', T'')$ — полные двудольные графы. Тогда существуют четыре попарно не пересекающихся подмножества $V_{S'S''}$, $V_{S'T''}$, $V_{T'S''}$ и $V_{T'T''} \subseteq V$ такие, что:

$$S' \subseteq V_{S'S''} \cup V_{S'T''}, \quad S'' \subseteq V_{S'S''} \cup V_{T'S''}, \quad T' \subseteq V_{T'S'} \cup V_{T'S''},$$
$$T'' \subseteq V_{S'T''} \cup V_{T'T''}$$

и

$$\|F\| = \frac{1}{2}(c[V_{S'S''}, \bar{V}_{S'S''}] + c[V_{S'T''}, \bar{V}_{S'T''}] + c[V_{T'S''}, \bar{V}_{T'S''}] +$$
$$+ c[V_{T'T''}, \bar{V}_{T'T''}]),$$

где $\bar{V}_w = V \setminus V_w$.

В самом деле, в этом случае граф $\bar{S}$ состоит из четырех клик, соединенных в цикл.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Форд Р., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
2. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.
3. *Адельсон-Вельский Г. М. Диниц Е. А., Карзанов А. В.* Потоковые алгоритмы. М., «Наука», 1975.
4. *Onaga Kenji, Kakusho Osamu.* On Feasibility Conditions of Multicommodity Flows in Network. IEEE Trans. on Circuit Theory. 1971, CT-18, № 4, 425—429.
5. *Iri M.* On an Extension of the maximum — flow minimum — cut Theorem to multicommodity Flows. J. Operat. Res. Soc. Japan 13 (1970/71), 129—135.
6. *Папернов Б. А.* Реализуемость многопродуктовых потоков. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации, М., «Наука», 1976.
7. *Ломоносов М. В.* О системе потоков в сети. — Проблемы передачи информации, 1978, т. 14, № 2.
8. *Купершток В. Л.* Об одном обобщении теоремы Форда и Фалкерсона на многополюсные сети. «Кибернетика», 1971, № 3.
9. *Черкасский Б. В.* Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сетях. «Экономика и математические методы», 1977, 13, № 1.
10. *Черкасский Б. В.* Многополюсные двухпродуктовые задачи. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976.
11. *Ломоносов М. В.* Решение двух задач о потоках в сети. «Проблемы передачи информации», 1978, т. 14, № 3.
12. *Edmonds J.* Paths, Trees and Flowers. Canad. J. Mathem., 1965, 17, 449—467.

А. Б. Ядыкин, А. И. Зинина

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ В МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ СИМПЛЕКС-МЕТОДЕ

Введение

В последнее время при решении задач линейного программирования (ЛП) большой размерности широко применяется мультипликативный симплекс-метод с факторизацией базисных матриц. Эффективное использование в этом методе разреженности структуры ограничений