

**ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ МУЛЬТИПОТОКЕ  
МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ**

В настоящей статье описывается алгоритм решения стоимостных мультипоточковых задач класса  $\langle K_p, Cost \rangle$ . Приведем постановку задач этого типа, данную в [1]. Рассматривается неориентированная потоковая сеть  $N=(V, P; c)$  с множеством вершин  $V$ , множеством полюсов  $P: P \subseteq V$  и функцией пропускной способности  $c \in \mathcal{G}_+ : c[x, y], [x, y] \in [V]^d$  (где  $[V]^d$  — множество неупорядоченных пар различных вершин  $x, y \in V$ , а  $\mathcal{G}_+ \equiv \mathcal{G}_+^{[V]^d}$  — неотрицательный ортант евклидова пространства  $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}^{[V]^d}$  действительно-значных функций на  $[V]^d$ ). На множестве  $[V]^d$  задана функция стоимости  $a \in \mathcal{G}_+$ , и имеется некоторый неориентированный граф  $S=(P, U)$  — потоковая схема задачи. Задача  $\langle a, S | c \rangle$  заключается в нахождении мультипотока  $F = \{f_{st}; [s, t] \in U\}$ , для которого выполняются ограничения по пропускной способности

$$\zeta_F[x, y] \equiv \sum_{[s, t] \in U} \zeta_{f_{st}}[x, y] \equiv \sum_{[s, t] \in U} (f_{st}(x, y) + f_{st}(y, x)) \leq c[x, y],$$

$$\forall [x, y] \in [V]^d$$

и такого, что его мощность

$$\|F\| \equiv \sum_{[s, t] \in U} \|f_{s, t}\|,$$

где  $\|f_{s, t}\| = |\text{div}_{f_{st}}(s)| = |\text{div}_{f_{st}}(t)|$  максимальна и при этом величина

$$a \cdot \zeta_F \equiv \sum_{[x, y] \in [V]^d} a[x, y] \cdot \zeta[x, y]$$

(стоимость мультипотока) минимальна. Мы рассматриваем класс задач  $\{\langle K_p, Cost \rangle, p \in \overline{3, \infty}\}$ ; каждая «массовая» задача  $\langle K_p, Cost \rangle$  объединяет множество конкретных задач  $\langle a, K_p | c \rangle$  при произвольных множестве  $V$ , функциях  $a, c \in \mathcal{G}_+^{[V]^d}$  и при фиксированной потоковой схеме  $S$ , являющейся полным графом  $K_p$  на множестве полюсов  $P$  (здесь  $p = |P|$ ), т. е.  $S=(P, [P]^d)$ . Иначе говоря, мы рассматриваем такие задачи о максимальном мультипотоке минимальной стоимости, для которых учитываются потоки, соединяющие любую пару различных полюсов сети. Для облегчения записи рассматриваемый класс задач будет обозначаться  $\langle K_p, Cost \rangle$  (имеется в виду, что  $p$  пробегает значения от 3 до  $\infty$ ), предлагаемый алгоритм решения задач этого класса обозначается через  $\mathfrak{A} \langle K_p, Cost \rangle$ . Алгоритм пригоден и для решения задачи  $\langle K_2, Cost \rangle$ , известной как задача о максимальном потоке минимальной стоимости (для неориентированной сети); работа алгоритма  $\mathfrak{A} \langle K_p, Cost \rangle$  в этом случае вырождается (с некоторыми избыточностями) в работу классического алгоритма Л. Форда и Д. Фалкерсона (см. [1, гл. III]).

Пусть  $\nu \in \mathcal{G}_+$  — некоторая функция. Для произвольной цепи  $\xi = (x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, x_k)$ , где  $x_i \in V, e_i = [x_i, x_{i+1}] \in [V]^d$  ее  $\nu$ -длиной считается величина  $\nu(\xi) \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \nu(e_i)$ . Функция  $\nu$  определяет метрику  $\rho_\nu$  на  $V$ :  $\rho_\nu[x, y] ([x, y] \in [V]^d)$  равно  $\nu$ -длине цепи, минимальной среди всех цепей, соединяющих  $x$  и  $y$ .

Для задачи  $\langle a, S | c \rangle$  в работе [1] была установлена следующая теорема двойственности.

**Теорема 1.** Мультипоток  $F$  является решением задачи  $\langle a, S|c \rangle$  (в сети  $N=(V, P; c)$  с потоковой схемой  $S=(P, U)$ ) тогда и только тогда, когда для любого  $M$ , большего некоторого положительного числа  $M_0=M(a)$  найдется такая функция  $\gamma: \gamma[x, y] \geq 0, [x, y] \in [V]^d$ , что:

- (1)  $\rho_{\alpha+\gamma}[s, t] \geq M$  для любой пары  $s, t \in P: [s, t] \in U$ ;
- (2) для любой потоковой нити  $\varphi_L$  мультипотока  $F$  ее носитель — цепь  $L$  — является кратчайшей цепью (геодезической) метрики  $\rho_{\alpha+\gamma}$ ;
- (3) если  $\gamma[x, y] > 0$  для некоторого  $[x, y] \in [V]^d$ , то  $\zeta_F[x, y] = c[x, y]$ , т. е. ребро  $[x, y]$  насыщено мультипотокотом  $F$ .

Для функций  $\nu \in \mathcal{E}_+$ , таких что  $\rho_\nu[s, t] \geq M$  при  $[s, t] \in U$ , будет употребляться название *S, M-функция* (где  $S=(P, U)$ ). Исключив из множества  $[V]^d$  такие пары  $[x, y]$ , что  $c[x, y]=0$ , мы получаем граф  $G=(V, E)$  сети  $N$ . Очевидно, можно считать (хотя это и не слишком существенно для изложения алгоритма), что граф  $G$  — связан и что  $a[x, y]=0$  для  $[x, y] \in [V]^d \setminus E$ . В дальнейшем будет предполагаться, что звенья всех рассматриваемых цепей принадлежат  $E$ , вводимые в рассмотрение функции, будут задаваться на  $E$ , а возникающие метрики будут определяться как расстояния во взвешенном графе  $G$ .

Предлагаемый алгоритм можно отнести к большой группе комбинаторных алгоритмов математического программирования и дискретной математики, восходящим к идеям прямо-двойственного метода линейного программирования. Как и упомянутый выше алгоритм Форда—Фалкерсона для задачи о максимальном потоке минимальной стоимости, алгоритм  $\langle K_p, Cost \rangle$  устроен в виде последовательности этапов, и на каждом из них решается нестоимостная задача в определенной (допустимой) подсети; при переходе от одного этапа к другому минимальное расстояние между полюсами увеличивается до тех пор, пока не станет достаточно большим — тогда задача будет решена. Задача каждого этапа в общих чертах следующая: в подграфе  $G'=(V', E')$  графа  $G$  для данной функции  $\gamma: \gamma[x, y], [x, y] \in E'$ , построить мультипоток максимальной мощности, «текущий по геодезическим» метрики  $\rho_{\alpha+\gamma}$ . Для решения этой задачи применяется центральная идея работы — конструирование *накрывающих сетей*: оказывается, можно устроить некоторую «удвоенную» сеть (*накрытие* данной сети), любой симметричный поток который интерпретирует мультипоток в  $G'$ , текущий по геодезическим.

Алгоритм  $\langle K_p, Cost \rangle$  конечен для произвольных сетей. Если функция  $c$  — целочисленная, то алгоритм строит полуцелочисленное решение, т. е. дробность решения задачи  $\langle a, K_p|c \rangle$  такая же, как и для ее нестоимостного аналога — «свободной» задачи  $\langle K_p|c \rangle$ .

## § 1. $\nu$ -ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И НАКРЫВАЮЩИЕ СЕТИ

**1.1.** Определим сеть  $(G, \nu)$  — объект, состоящий из графа  $G$  с функцией пропускной способности ребер  $c$  и некоторой функции  $\nu$ , заданной на  $E$ . Мы будем рассматривать только *положительные* функции  $\nu$  (т. е.  $\nu[x, y] > 0, \forall [x, y] \in E$ ).

Пусть  $m = \min_{s, t \in P} \rho_\nu[s, t]$  — минимальное расстояние между полюсами, задаваемое функцией  $\nu$ . Цепь  $\xi_{s, t}$ , соединяющую полюса  $s$  и  $t$ , назовем  *$P, \nu$ -геодезической*, если  $\nu(\xi_{s, t}) = m$ . Множество  $P, \nu$ -геодезических сети  $(G, \nu)$  обозначим  $\mathcal{T}(G, \nu)$ . Ребра и вершины сети, принадлежащие какому-либо  $P, \nu$ -геодезическим будем называть, соответственно,  *$P, \nu$ -ребрами* и  *$P, \nu$ -вершинами*. К множеству  $P, \nu$ -вершин отне-

сем также все полюса. Подграф графа  $G$ , состоящий из всех  $P$ ,  $\nu$ -вершин и  $P$ ,  $\nu$ -ребер обозначим  $G_\nu = (V_\nu, E_\nu)$ . Для каждого  $x \in V_\nu$  определим числа  $\pi^1(x) \equiv \min_{s \in P} \rho_\nu[s, x]$  и  $\pi^2(x) \equiv m - \pi^1(x)$ , называемые, соответственно, *первым* и *вторым потенциалом* вершины  $x$ , а также множества  $P^1(x) = \{s \in P: \rho_\nu[s, x] = \pi^1(x)\}$  и  $P^2(x) = \{s \in P: \rho_\nu[s, x] = \pi^2(x)\}$ . Из определения  $P$ ,  $\nu$ -вершины следует, что  $\pi^1(x) \leq m/2$ ,  $\pi^2(x) \geq m/2$ . В случае  $\pi^1(x) = \pi^2(x) = m/2$  получаем  $P^1(x) = P^2(x)$ . Заметим также, что  $P^2(x)$  может быть пусто, только если  $x \in P$ . Если  $\pi^1(x) < m/2$ , то множество  $P^1(x)$  содержит, очевидно, ровно один элемент (ближайший полюс), если же  $\pi^1(x) = m/2$ , то в  $P^1(x)$  — не менее двух элементов. Вершину  $x$  назовем *простой центральной вершиной*, если  $|P^1(x)| = 2$ , и *сложной*, если  $|P^1(x)| \geq 3$ . Для центральной вершины  $x$  положим  $P(x) \equiv P^1(x) = P^2(x)$ .

Лемма 1. Если  $[x, y] \in E_\nu$ , то (с точностью до перестановки  $x$  и  $y$ ) выполняется, по крайней мере, одно из двух условий:

а)  $\pi^1(y) - \pi^1(x) = \nu[x, y]$ ; б)  $\pi^2(y) - \pi^1(x) = \nu[x, y]$  и  $P^1(x) \neq P^1(y)$ .

Доказательство. Рассмотрим некоторую  $P$ ,  $\nu$ -геодезическую  $\xi_{s,t}$  ( $s, t \in P$ ), содержащую ребро  $[x, y]$ , и пусть для определенности вершина  $x$  расположена к полюсу  $s$  ближе, чем  $y$ . Тогда, очевидно,  $\rho_\nu[s, x] + \nu[x, y] + \rho_\nu[y, t] = m$  или  $\rho_\nu[x, y] - \rho_\nu[s, x] = \nu[x, y]$ . Поскольку  $\nu[x, y] > 0$ , то или  $\rho_\nu[s, x] < m/2$  или  $\rho_\nu[y, t] < m/2$ ; будем считать, что  $\rho_\nu[s, x] < m/2$ , откуда  $P^1(x) = \{s\}$ ,  $\rho_\nu[s, x] = \pi^1(x)$ . Если теперь  $\rho_\nu[s, y] < m/2$ , то получаем  $\rho_\nu[s, y] = \pi^1(y)$  и  $\pi^1(y) - \pi^1(x) = \nu[x, y]$ ; если же  $\rho_\nu[s, y] \geq m/2$ , то  $t \in P^1(y)$ ,  $s \in P^2(y)$ ,  $\rho_\nu[s, y] = \pi^2(y)$  и  $\pi^2(y) - \pi^1(x) = \nu[x, y]$ ,  $P^1(x) \neq P^1(y)$ . ■

Следствие 1. Пусть в сети  $(G_\nu, \nu)$  отсутствуют центральные вершины. Тогда (с точностью до перестановки  $x$  и  $y$ ) выполняется одно из двух условий: а)  $\pi^1(y) - \pi^1(x) = \nu[x, y]$ , множества  $P^1(x)$  и  $P^1(y)$  — одноэлементы и одинаковы; б)  $\pi^2(y) - \pi^1(x) = \nu[x, y]$ , множества  $P^1(x)$  и  $P^1(y)$  — одноэлементы и различны.

Это утверждение непосредственно следует из доказательства леммы 1.

Лемма 2. Пусть  $\xi'_{s',t'} = \langle s', z, [z, w], w, t' \rangle \xi'$  и  $\xi''_{s'',t''} = \langle s'', z, [z, w], w, t'' \rangle \xi''$  — две  $P$ ,  $\nu$ -геодезические. Тогда цепь  $\xi'_{s',t'} = \xi'_{s',z} \cdot \xi''_{z,t''}$  — также  $P$ ,  $\nu$ -геодезическая.

Доказательство. Имеем:

$$2m = \nu(\xi'_{s',t'}) + \nu(\xi''_{s'',t''}) = \nu(\xi'_{s',z}) + \nu(\xi''_{w,t'}) + \nu(\xi''_{s'',z}) + \nu(\xi''_{z,t''}) + 2\nu[x, y].$$

Пусть  $s' \neq s''$ . Тогда  $\nu(\xi'_{s',z} \cdot \xi''_{z,s''}) \geq m$ , и поэтому  $\nu(\xi''_{w,t'}) + \nu(\xi''_{s'',z}) < m$  откуда следует, что  $t' = t''$ . Таким образом возможны два случая: а)  $s' \neq s''$ ,  $t' = t''$ ; б)  $s' = s''$ ,  $t' \neq t''$ . Отсюда  $s' \neq t''$  и  $s'' \neq t'$ , поэтому  $\nu(\xi'_{s',z} \cdot \xi''_{z,t''}) \geq m$ ,  $\nu(\xi''_{s'',z} \cdot \xi''_{z,t''}) \geq m$ . Но  $\nu(\xi'_{s',z} \cdot \xi''_{z,t''}) + \nu(\xi''_{s'',z} \cdot \xi''_{z,t''}) = \nu(\xi'_{s',t'}) + \nu(\xi''_{s'',t''}) = 2m$ .

Следовательно,  $\nu(\xi'_{s',t'}) = m$ . ■

1.2. Нам желательно работать с такими сетями, у которых отсутствуют центральные вершины. Поэтому сеть  $(G_\nu, \nu)$  перестраивается в сеть  $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$ , сохраняющую все интересующие нас свойства, но уже не имеющую центральных вершин. Опишем эту перестройку. Пусть  $x$  — центральная вершина в  $G_\nu$  и  $O(x)$  — множество вершин, с ней смежных. Для каждой вершины  $y \in O(x)$  множество  $P^1(x)$  — однополюс-

ное и  $\bigcup_{y \in O(x)} P^1(y) = P(x)$ . Заменим вершину  $x$  множеством вершин  $\{x_s; s \in P(x)\}$ . Каждое из ребер вида  $[x, y] \in E_v$  заменим ребром  $[x_s, y]$  (где  $\{s\} = P(y)$ ) имеющим ту же пропускную способность. Вершины,  $x_s, s \in P(x)$  соединяются попарно ребрами бесконечной пропускной способности; подграф, образованный вершинами  $x_s$  и этими ребрами, назовем *центральной подграфом*, или *центром*. Поскольку никакие две центральные вершины в  $G_v$  не смежны, то перестройку каждой такой вершины можно произвести независимо; полученный в результате граф обозначим  $\tilde{G}_v = (\tilde{V}_v, \tilde{E}_v)$ . Вместо числовой функции  $v$  на ребрах  $[x, y]$  графа  $\tilde{G}_v$  задается двухкомпонентная векторная функция  $\tilde{v} = \tilde{v}[x, y]$  по следующему правилу: а) если ребро  $[x, y]$  оставалось без изменений, то  $\tilde{v}[x, y] = (v[x, y], 0)$ ; б) если ребро  $[x_s, y]$  образовалось из ребра  $[x, y]$  ( $x$  — центральная вершина), то  $\tilde{v}[x_s, y] = (v[x, y], -1)$ ; в) если  $[x_{s'}, x_{s''}]$  — ребро центра, то  $\tilde{v}[x_{s'}, x_{s''}] = (0, 2)$  (на рис. 1: первые числа на ребрах — пропускные способности, вторые — стоимости). Для векторов  $\tilde{v}$  определены обычные (покоординатные

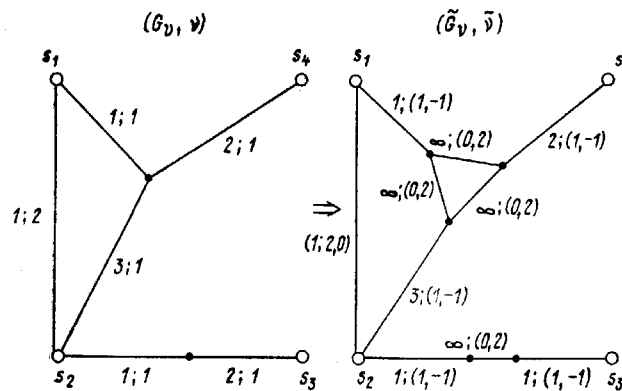


Рис. 1

операции сложения и умножения на число, а также операция (лексикографического слева) сравнения: вектор  $(\alpha_1, \beta_1)$  больше вектора  $(\alpha_2, \beta_2)$ , если  $\alpha_1 > \alpha_2$ , а при  $\alpha_1 = \alpha_2$  — если  $\beta_1 > \beta_2$ .

Первая координата каждого вектора  $\mu$  считается его главным значением и обозначается  $\lceil \mu \rceil$  (так  $\lceil (\alpha, \beta) \rceil = \alpha$ ).

Исходя из этого, определяются вектор-длины цепей  $\tilde{v}(\xi)$ , вектор-расстояния  $\tilde{r}_v[x, y]$ , вектор-потенциалы  $\tilde{\pi}^1(x)$  и  $\tilde{\pi}^2(x)$ .

Определим естественное отображение  $\kappa: \tilde{G}_v \rightarrow G_v \subset G$  — *отображение стягивания центров*. Легко убедиться, что: а) в сети  $\tilde{G}_v$  минимальное вектор-расстояние между полюсами равно  $\tilde{m} = (m, 0)$ ; б) в сети  $\tilde{G}_v$  нет центральных вершин; в) отображение  $\kappa$  взаимно-однозначно переводит  $P, \tilde{v}$ -геодезические сети  $(\tilde{G}_v, \tilde{v})$  в  $P, v$ -геодезические сети  $(G, v)$ . Можно проверить также, что для сети  $(\tilde{G}_v, \tilde{v})$  справедливо следствие 1 (при замене соответствующих чисел векторами). В дальнейшем добавку «вектор» мы будем опускать.

Скажем, что мультипоток  $F$  течет по геодезической сети  $(G_v, v)$  (соответственно,  $(\tilde{G}_v, \tilde{v})$ ), если при любом или, что то же самое, при некотором его разложении на потоковые нити носитель каждой нити

является  $P, \nu$ -геодезической (соответственно,  $P, \tilde{\nu}$ -геодезической). Соответствие между геодезическими сетями  $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$  и  $(G, \nu)$  естественно переносится на взаимно-однозначное соответствие между мультипоточками, текущими по геодезическим, при этом мощности, а также стоимости мультипоточков (а также любого из составляющих его потоков) одинаковы. Таким образом, мы построили сеть  $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$ , эквивалентную сети  $(G, \nu)$  и не содержащую нежелательных центральных вершин.

**1.3. Накрывающая сеть.** Определим теперь основной объект работы алгоритма — ориентированную накрывающую сеть  $\Gamma^\nu = (V^\nu, E^\nu)$ . Каждая вершина  $x \in \tilde{V}_\nu$  порождает две вершины  $x^1$  и  $x^2$  сети  $\Gamma^\nu$ , называемые, соответственно, *первой* и *второй копиями* вершины  $x$ . Вершине  $x^1$  приписывается потенциал  $\pi(x^1) = \tilde{\pi}^1(x)$ , а вершине  $x^2$  — потенциал  $\pi(x^2) = \tilde{\pi}^2(x)$ . Пусть  $[x, y] \in \tilde{E}_\nu$ , тогда согласно следствию 1 (с точностью до перестановки  $x$  и  $y$ ) либо  $\tilde{\pi}^1(y) - \tilde{\pi}^1(x) = \tilde{\nu}[x, y]$ , либо  $\tilde{\pi}^2(y) - \tilde{\pi}^1(x) = \tilde{\nu}[x, y]$ . В первом случае ребро  $[x, y]$  порождает две дуги:  $(x^1, y^1)$  и  $(y^2, x^2)$ , во втором — дуги  $(x^1, y^2)$  и  $(y^1, x^2)$ . Каждой дуге  $(x^i, y^j)$ , образованной из ребра  $[x, y]$ , приписывается пропускная способность  $c(x^i, y^j) = c[x, y]$  и длина  $\nu(x^i, y^j) = \tilde{\nu}[x, y]$ . Вершины вида  $s^1$ , где  $s \in P$ , считаются *источниками*, а вершины вида  $s^2$  — *стоками* сети  $\Gamma^\nu$  (соответствующие множества обозначим  $S$  и  $T$ ). Очевидно  $\pi(s^1) = 0$ ,  $\pi(s^2) = \tilde{m}$ . Поскольку для любой дуги  $(x^i, y^j) \in E^\nu$  выполняется  $\pi(y^j) - \pi(x^i) = \nu(x^i, y^j) > 0$ , то граф  $\Gamma^\nu$  не содержит ориентированных циклов. Заметим, что центральному подграфу графа  $G_\nu$ , образованному из центральной вершины  $x \in \tilde{V}_\nu$ , в сети  $\Gamma^\nu$  будет соответствовать подграф  $H(x)$  с множеством вершин  $\{x^i, s \in P(x), i=1, 2\}$  и множеством дуг  $\{(x^1, x^2), (x^1, s), (s, x^2)\}$ ;  $s', s'' \in P(x), s' \neq s''$ . Этот подграф также будем называть центром.

Введем следующие два отображения: 1)  $\psi: \Gamma^\nu \rightarrow \tilde{G}_\nu$ , при котором  $\psi(x^i) = x$ ,  $\psi(x^i, y^j) = [x, y]$  и 2)  $\chi: \Gamma^\nu \rightarrow \Gamma^\nu$ , при котором  $\chi(x^i) = x^{3-i}$ ,  $\chi(x^i, y^j) = (y^{3-j}, x^{3-i})$  (т. е. одна копия вершины или дуги переводится в другую). Отображение  $\chi$  суть *косая симметрия* графа  $\Gamma^\nu$ : дуги переходят в свои копии со сменой ориентации. В дальнейшем подграф  $\chi(H)$  будем называть *симметричным* относительно  $H \subseteq \Gamma^\nu$ .

Мы будем говорить, что множество  $X \subseteq V^\nu$  *достижимо* из множества  $Y \subseteq V^\nu$ , если существует ориентированный путь из какой-либо вершины  $x \in X$  в какую-либо вершину  $y \in Y$ . Ориентированный путь из источника ( $s^1 \in S$ ) в сток ( $t^2 \in T$ ) будем называть *S, T-путем*, а множество всех таких путей будем обозначать  $\mathcal{L}(\Gamma^\nu)$ .

**Лемма 3.** При отображении  $\psi$  любой *S, I*-путь сети  $\Gamma^\nu$  переводится в  $P, \tilde{\nu}$ -геодезическую сеть  $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$ , причем множество  $\mathcal{L}(\Gamma^\nu)$  отображается на все множество  $\mathcal{T}(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$ . Прообраз каждой  $P, \nu$ -геодезической состоит ровно из двух *S, I*-путей.

**Доказательство.** Пусть  $\xi_{s,t} = (s = x_0, x_1, \dots, x_k = t) \in P, \tilde{\nu}$  — геодезическая. Поскольку в  $\tilde{G}_\nu$  нет центральных вершин, то найдется такой номер  $j$ , что  $P^1(x_j) = \{s\}$ , а  $P^1(x_{j+1}) = \{t\}$ . Тогда для ребер  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i=0, 1, \dots, j-1$ , а также для ребер  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i=j+1, \dots, k-1$ , имеет место характеристика первого вида (для первых —  $\tilde{\pi}^1(x_{i+1}) - \tilde{\pi}^1(x_i) = \tilde{\nu}[x_i, x_{i+1}]$ , для вторых —  $\tilde{\pi}^1(x_i) - \tilde{\pi}^1(x_{i+1}) = \tilde{\nu}[x_i, x_{i+1}]$

или  $\tilde{\pi}^2(x_{i+1}) - \tilde{\pi}^2(x_i) = \tilde{v}[x_i, x_{i+1}]$ , а для ребра  $[x_j, x_{j+1}]$  — характеристика второго вида:  $\tilde{\pi}^2(x_{j+1}) - \tilde{\pi}^1(x_j) = \tilde{v}[x_j, x_{j+1}]$ . Следовательно, в сети  $\Gamma^v$  имеется (ориентированный) путь  $\xi_{(s^1, t^2)} = (s^1, x_1^1, x_2^1, \dots, x_j^1, x_{j+1}^2, x_{j+2}^2, \dots, x_k^2, t^2)$ , а также симметричный ему путь

$$\xi_{(t^1, s^2)} = \chi(\xi'_{(s^1, t^2)}) = (t^1, x_k^1, x_{k-1}^1, \dots, x_{j+1}^1, x_j^2, x_{j-1}^2, \dots, x_1^2, s^2).$$

Мы доказали, что прообразами  $P, \tilde{v}$ -геодезических служат пары симметричных  $S, T$ -путей. Докажем теперь, что любой  $S, T$ -путь переходит в  $P, \tilde{v}$ -геодезическую. Поскольку в сети  $\Gamma^v$  нет дуг вида  $(z^2, w^1)$ , то  $S, T$ -путь имеет вид

$$\xi_{(s^1, t^2)} = (s^1 = x_0^1, x_1^1, \dots, x_j^1, x_{j+1}^2, x_{j+2}^2, \dots, x_{k-1}^2, x_k^2 = t^2).$$

Так как  $v(\xi_{(s^1, t^2)}) = \sum_{i=0}^{k-1} v(x_i^1, x_{i+1}^1) = \sum_{i=0}^{k-1} (\pi(x_{i+1}^1) - \pi(x_i^1)) = \tilde{m}$ , то  $v(\psi(\xi_{(s^1, t^2)})) = \tilde{m}$ , т. е.  $\psi(\xi_{(s^1, t^2)})$  — цепь длины  $\tilde{m}$ . Осталось доказать, что  $s \neq t$ . Поскольку  $\pi(x_i^1) < \tilde{m}/2$ , то, учитывая следствие 1 и способ построения сети  $\Gamma^v$ , имеем  $P^1(x_i) = \{s\}$  при  $i=0, 1, \dots, j$  и  $P^1(x_i) = \{t\}$  при  $i=j+1, \dots, k$ . Но по тому же следствию  $\{s\} = P^1(x_j) \neq P^2(x_{j+1}) = \{t\}$ . ■

Лемма 3 проясняет смысл преобразования сети  $G_v$  в сеть  $\tilde{G}_v$ , не имеющую центральных вершин. Избавление от таких вершин позволяет построить накрывающую сеть, в которой ориентированные пути из источников в стоки соответствуют  $P, v$ -геодезическим сети  $\tilde{G}_v$  (это соответствие будет взаимно-однозначным, если каждую геодезическую рассматривать вместе с одной из двух возможных ориентаций).

Следствие 2. а)  $\chi \circ \psi(\mathcal{L}(\Gamma^v)) = \mathcal{F}(\tilde{G}, v)$ ; б) прообраз  $(\chi \circ \psi)^{-1}(\xi_{st})$   $P, v$ -геодезической  $\xi_{s,t}$  сети  $(\tilde{G}, v)$  состоит из двух путей  $\xi'_{(s^1, t^2)}$  и  $\xi''_{(t^1, s^2)}$ .

1.4. Пусть  $F$  — мультипоток в сети  $(\tilde{G}_v, \tilde{v})$ , текущий по геодезическим и  $\{\varphi_\alpha, \alpha \in I\}$  — некоторое его разложение на нити. Пусть носитель нити  $\varphi_\alpha$  соединяет полюса  $s$  и  $t$ :  $\xi(\varphi_\alpha) = \xi_{s,t}$ . Следуя отображению  $\psi$ , поставим в соответствие нити  $\varphi_\alpha$  пару (ориентированных) нитей  $\varphi'_\alpha$  и  $\varphi''_\alpha$  сети  $\Gamma^v$ :  $\xi(\varphi'_\alpha) = \xi'_{(s^1, t^2)}$  и  $\xi(\varphi''_\alpha) = \xi''_{(t^1, s^2)}$ ,  $\psi(\xi'_{(s^1, t^2)}) = \psi(\xi''_{(t^1, s^2)}) = \xi_{s,t}$ ,  $\|\varphi'_\alpha\| = \|\varphi''_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$ . Будем обозначать  $\psi(\varphi'_\alpha) = \psi(\varphi''_\alpha) = \varphi_\alpha$ . В сети  $\Gamma^v$  определим функцию  $f^F$ , полагая  $f^F(x^i, y^j) = \sum_{\alpha \in I} (\varphi'_\alpha(x^i, y^j) + \varphi''_\alpha(x^i, y^j))$ .

Лемма 4. 1)  $f^F$  — допустимый многополюсный поток в сети  $\Gamma^v$  с множеством источников  $S$  и стоков  $T$ ; 2)  $f^F(x^i, y^j) = f^F(y^{3-j}, x^{3-i})$ ; 3) мощность  $\|f^F\| = \sum_{s' \in S} \text{div}_{f^F}(s')$  потока  $f^F$  равна  $2\|F\|$ .

Доказательство леммы очевидно.

Назовем функцию  $g = g(x^i, y^j)$  симметричной, если  $g(x^i, y^j) = g(y^{3-j}, x^{3-i})$ ,  $(x^i, y^j) \in E^v$ . Пусть  $f$  — симметричный поток в сети  $\Gamma^v$  и  $\{\varphi_\alpha, \alpha \in I\}$  — некоторое симметричное разложение его на потоковые нити\*, т. е. такое разложение, в котором вместе с каждой нитью  $\varphi$

\* Такое разложение можно строить и как обычное разложение потока в сети с дополнительным правилом: «отслюив» некоторую нить, надо «отслоить» и симметричную ей.

присутствует симметричная ей нить  $\varphi' = \chi(\varphi)$ :  $\xi(\varphi') = \chi(\xi(\varphi))$ ,  $\|\varphi\| = \|\varphi'\|$ . Потoku  $f$  с фиксированным симметричным разложением сопоставим мультипоток  $F_{\{\varphi\}}^f$  в сети  $\tilde{G}_v$ , «составленный» из нитей  $\psi(\varphi_\alpha)$ ,  $\alpha \in I$ .

Лемма 5. 1)  $F_{\{\varphi\}}^f$  — допустимый мультипоток в сети  $\tilde{G}_v$ , текущий по геодезическим; 2) мощность  $\|F_{\{\varphi\}}^f\|$  мультипотока  $F_{\{\varphi\}}^f$  равна  $1/2 \cdot \|f\|$ ; 3) поток  $f_{\{\varphi\}}^f$  совпадает с  $f$ ; 4) если  $f$  — (полу-)целочисленный симметричный поток в сети  $\Gamma^v$ , то существует симметричное (полу-)целочисленное разложение его на нити  $\{\varphi_\alpha, \alpha \in I\}$  и мультипоток  $F_{\{\varphi\}}^f$  — (полу-)целочисленный.

Доказательство леммы очевидно.

Ввиду того, что у симметричного потока  $f$  существуют, вообще говоря, различные симметричные разложения  $\{\{\varphi_\alpha\}\}$ , то ему соответствует семейство мультипоток  $\{F_{\{\varphi_\alpha\}}^f\}$ . С точки зрения нашей задачи все эти мультипоток равноправны и мы можем выбирать из них любой.

## § 2. Описание алгоритма решения задачи $\langle a, K_p | c \rangle$

2.1. Алгоритм  $\mathcal{A} \langle K_p, \text{Cost} \rangle$  решения задач  $\langle a, K_p | c \rangle$  состоит из последовательности однотипных итераций. Алгоритм будет описан для случая строго положительной функции  $a = a[x, y]$ ,  $[x, y] \in E$ . В конце статьи указаны необходимые преобразования задачи, которые дают возможность обобщить алгоритм на произвольные сети.

Пусть  $i-1$  итераций уже проведено. К началу  $i$ -й итерации оказываются построенными следующие объекты:

1°. Функция  $\gamma = \gamma[x, y] \geq 0$ ,  $[x, y] \in E$ .

2°. Сети  $G_v$ ,  $G$ , и  $\Gamma^v$ , где  $v = a + \gamma$ .

3°. Поток  $f$  в сети  $\Gamma^v$  (не обязательно симметричный). Этот поток имеет множество источников  $S$  и стоков  $T$ .

Функция  $\gamma$  и поток  $f$  подчиняются следующим условиям (соотношения дополняющей нежесткости для двойственных объектов  $\gamma$  и  $f$ , заданные в комбинаторном виде):

А. Если  $\gamma[x, y] > 0$ , то  $[x, y] \in E_v$ .

В. Если  $\neg \gamma(x^i, y^i) \Gamma > 0$  (где  $(x^i, y^i) \in E^v$ ), то  $f(x^i, y^i) = c(x^i, y^i)$  (здесь  $\neg \gamma(x^i, y^i) \Gamma \equiv \gamma(x^i, y^i) - (a, 0)$ ).

Перед началом 1-й итерации полагаем  $\gamma \equiv 0$  и  $f \equiv 0$ ; условия А и В, очевидно, выполняются.

От итерации к итерации величина  $m$ , равная минимальному расстоянию  $\rho_v[s, t]$ ,  $s, t \in P$ , определяемому текущей функцией  $v = a + \gamma$ , будет увеличиваться. Как только она станет равной  $M$ , задача будет решена (выполнение условий А и В для функции  $\gamma$  и потока  $\tilde{f} = 1/2(f + \chi(f))$  повлечет за собой выполнение соотношений (2) и (3) для функции  $\gamma$  и мультипотока  $\tilde{F}^f$ ).

Выделим в сети  $\Gamma^v$  подсеть  $\Gamma_0^v = (V^v, E_0^v)$ , состоящую из всех вершин  $V^v$  и допустимых дуг  $(x^i, y^i) \in E^v$ , таких, для которых  $\neg \gamma(x^i, y^i) \Gamma = 0$ . Из определения сети  $\Gamma_0^v$  и условия В следует

Утверждение 1. а) Сети  $\Gamma_0^v$  и  $\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v = (V^v, E^v \setminus E_0^v)$  — симмет-

ричные; б) Каждая дуга сети  $\Gamma \setminus \Gamma_0^v$  насыщена потоком  $f$ ; в) Любой центр  $H(x)$  сети  $\Gamma^v$  целиком принадлежит подсети  $\Gamma_0^v$ .

Перейдем к описанию  $i$ -й итерации. Итерация состоит из двух частей: 1) перестройка потока  $f$  в  $f'$  в сети  $\Gamma^v$ ; 2) переход к новой функции  $\gamma'$  и построение сетей  $G_{v'}$ ,  $G_v$  и  $\Gamma^{v'}$ , где  $v' = a + \gamma'$ .

**2.2. Перестройка потока  $f$ .** Условия  $A$  и  $B$  выполняются на протяжении всего алгоритма, поэтому поток  $f$  перестраивается только на подсети  $\Gamma_0^v$ . Если  $H = (V(H), E(H))$  — подграф графа  $\Gamma^v$  и  $h = h(x^i, y^j)$  — некоторая функция, область определения которой включает  $E(H)$ , то введем величину

$$\operatorname{div}_{h,H}(x^i) \equiv \sum_{(x^i, y^j) \in E(H)} h(x^i, y^j) - \sum_{(y^j, x^i) \in E(H)} h(y^j, x^i).$$

Функцию  $g = g(x^i, y^j)$ ,  $(x^i, y^j) \in E_0^v$  назовем *потокopodobной* функцией  $f|_{E_0^v}$ , если для любой вершины  $x^i \in V^v \setminus \{S \cap T\}$  выполняется равенство:  $\operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(x^i) = \operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(x^i)$ . Величину  $\|g\|_{\Gamma_0^v}$ , равную  $\sum_{s^i \in S} \operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(s^i)$ , назовем *мощностью* функции  $g$  на подсети  $\Gamma_0^v$ . Очевидна следующая лемма.

**Лемма 6.** Пусть функция  $g(x^i, y^j)$ ,  $(x^i, y^j) \in E_0^v$  потокopodobна функции  $f|_{\Gamma_0^v}$ . Тогда: а) функция  $f'$ , равная  $f$  на подсети  $\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v$  и  $g$  на подсети  $\Gamma_0^v$  (т. е.  $f' = f|_{\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v} \cup g$ ), является потоком в сети  $\Gamma^v$ ; б)  $\|f'\| = \|f\|_{\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v} + \|g\|_{\Gamma_0^v}$ .

Первая часть итерации состоит в нахождении в сети  $\Gamma_0^v$  функции  $g$ , потокopodobной  $f|_{\Gamma_0^v}$  и имеющей максимальную мощность. Для этого применим стандартный прием перехода к «беспотоковой» сети [1, с. 14]. А именно, пусть  $\Gamma_{0,f}^v = (V^v, E_{0,f}^v)$  — сеть с множеством вершин  $V^v$  и множеством дуг  $E_{0,f}^v$ , определенным следующим образом: если  $(x^i, y^j)$  — дуга в  $\Gamma_0^v$ , то в  $E_{0,f}^v$  имеется пара дуг — дуга  $(x^i, y^j)$  с пропускной способностью  $c_f(x^i, y^j) = c(x^i, y^j) - f(x^i, y^j)$  и дуга  $(y^j, x^i)$  с пропускной способностью  $c_f(y^j, x^i) = f(x^i, y^j)$ . Пусть  $h(u)$ ,  $u \in E_{0,f}^v$  — некоторый поток в сети  $\Gamma_{0,f}^v$ ; определим функцию  $f \oplus h$  на множестве  $E_0^v$ :  $(f \oplus h)(x^i, y^j) = f(x^i, y^j) + h(x^i, y^j) - h(y^j, x^i)$ . Аналогично доказываемому в [1, с. 14] имеем:

4°. Функция  $f \oplus h$  допустима и потокopodobна  $f|_{\Gamma_0^v}$ .

5°.  $\|f \oplus h\| = \|f\|_{\Gamma_0^v} + \|h\|$ .

6°. Поток  $h$  максимален тогда и только тогда, когда в сети  $\Gamma_0^v$  с функцией  $f \oplus h$  отсутствуют активные пути из  $S$  в  $T^*$ .

Итак, на первой части итерации: 1) выделяется подсеть  $\Gamma_0^v$  и строится сеть  $\Gamma_{0,f}^v$ ; 2) в сети  $\Gamma_{0,f}^v$  находится максимальный поток  $h$ ; 3) определяются функция  $g = f \oplus h$  в сети  $\Gamma_0^v$  и функция  $f' = f|_{\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v} \cup g$  в сети  $\Gamma^v$ . На основании леммы 6 и утверждений 4°, 5° функция  $f'$  —

\*Простая ориентированная цепь  $L(s, x) = (s = x_0^i, x_1^i, \dots, x_k^i = x)$ , где  $x_j^i \in V^v$ ,  $j \in \overline{0, k}$  и  $s \in S$ , называется *активным* путем в сети  $\Gamma^v$  с функцией  $\tilde{f}$ , определенной на  $E_0^v$ , если  $c(x_j^i, x_{j-1}^i) - \tilde{f}(x_j^i, x_{j-1}^i) + \tilde{f}(x_{j-1}^i, x_j^i) > 0$ ,  $\forall j \in \overline{1, k}$  (в случае, если  $(y^\alpha, z^\beta) \in E_0^v$ , в этом неравенстве полагается  $c(y^\alpha, z^\beta) = \tilde{f}(y^\alpha, z^\beta) = 0$ ).



(допустимый) поток и его мощность  $\|f'\|$  равна

$$\|f\|_{\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v} + \|g\|_{\Gamma_0^v} = \|f\|_{\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v} + \|f\|_{\Gamma_0^v} + \|h\| = \|f\| + \|h\|.$$

В результате нахождения максимального потока  $h$  в сети  $\Gamma_0^v$  вы-  
явится разрез  $R = (X, Y)$ , где  $X = \{x\}$  — множество вершин в  $\Gamma_0^v$ , до-  
стижимых активными путями  $L(s, x)$  из множества  $S \ni s$ , и  $Y = V^v \setminus X$ .  
Для любой прямой дуги разреза  $(x^i, y^j) \in E_0^v$  (т. е. такой, что  $x^i \in X$ ,  
 $y^j \in Y$ ) выполняется:  $g(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$ , а для любой обратной дуги  
 $(x^i, y^j) \in E_0^v$  ( $x^i \in Y$ ,  $y^j \in X$ ) —  $g(x^i, y^j) = 0$ . Построим разрез  $\chi(R) = (\chi(Y),$   
 $\chi(X))$ , симметричный  $R = (X, Y)$

Лемма 7. а) Если  $(x^i, y^j)$  — прямая дуга разреза  $\chi(R)$ , то  
 $g(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$ , а если обратная, то  $g(x^i, y^j) = 0$ ; б)  $X \cap \chi(X) = \emptyset$ .

Доказательство. Для произвольного подграфа  $H = (V(H),$   
 $E(H))$  графа  $\Gamma^v$ , произвольного разреза  $R = (Z, \bar{Z})$ ,  $Z \subset V^v$ ,  $\bar{Z} = V^v \setminus Z$   
и произвольной функции  $\hat{f}(x^i, y^j)$ ,  $(x^i, y^j) \in \hat{E} \supseteq E(H)$  положим:

$$1) c_H(R) = \sum_{(x^i, y^j) \in E(H), x^i \in Z, y^j \in \bar{Z}} c(x^i, y^j);$$

$$2) \operatorname{div}_{\hat{f}, H}(R) = \sum_{(x^i, y^j) \in E(H), x^i \in Z, y^j \in \bar{Z}} \hat{f}(x^i, y^j) - \\ - \sum_{(x^i, y^j) \in E(H), x^i \in \bar{Z}, y^j \in Z} \hat{f}(x^i, y^j).$$

Поскольку сеть  $\Gamma_0^v$  — симметричная, то  $(x^i, y^j)$  — прямая (обратная)  
дуга разреза  $R$  тогда и только тогда, когда  $(y^{3-j}, x^{3-i})$  — прямая  
(обратная) дуга разреза  $\chi(R)$ , откуда

$$c_{\Gamma_0^v}(R) = c_{\Gamma_0^v}(\chi(R)). \quad (4)$$

Из теории одного потока следует [1, с. 13], что  $\|f\| = \operatorname{div}_{f, \Gamma^v}(R) =$   
 $= \operatorname{div}_{f, \Gamma^v}(\chi(R))$ . Поскольку  $\operatorname{div}_{f, \Gamma^v}(R) = \operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(R) + \operatorname{div}_{f, \Gamma^v \setminus \Gamma_0^v}(R)$ ,  
 $\operatorname{div}_{f, \Gamma^v}(\chi(R)) = \operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(\chi(R)) + \operatorname{div}_{f, \Gamma^v \setminus \Gamma_0^v}(\chi(R))$  и функция  $f$  насыщает  
все дуги сети  $\Gamma^v \setminus \Gamma_0^v$  (откуда  $\operatorname{div}_{f, \Gamma^v \setminus \Gamma_0^v}(R) = \operatorname{div}_{f, \Gamma^v \setminus \Gamma_0^v}(\chi(R))$ ), получаем:

$$\operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(R) = \operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(\chi(R)). \quad (5)$$

Отсюда вытекает, что  $\operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(\chi(R)) = \operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(\chi(R)) + \operatorname{div}_{h, \Gamma_0^v, f}(\chi(R)) =$   
 $= \operatorname{div}_{f, \Gamma_0^v}(R) + \operatorname{div}_{h, \Gamma_0^v, f}(R) = \operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(R)$ , т. е.

$$\operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(R) = \operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(\chi(R)). \quad (6)$$

Как отмечалось выше, в сети  $\Gamma_0^v$  прямые дуги разреза  $R$  «насыще-  
ны функцией»  $g$ , а в обратных она равна 0, следовательно,  $c_{\Gamma_0^v}(R) =$   
 $= \|g\| = \operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(R)$ , откуда ввиду (4) и (6) получаем

$$\operatorname{div}_{g, \Gamma_0^v}(\chi(R)) = c_{\Gamma_0^v}(\chi(R)),$$

что может быть только в случае  $g(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$  для прямых дуг  
 $(x^i, y^j)$  разреза  $\chi(R)$  и  $g(x^i, y^j) = 0$  — для обратных. Утверждение „а“ леммы  
доказано. Докажем утверждение „б“. Пусть  $X \cap \chi(X) \neq \emptyset$ , откуда  
 $Z \equiv X \cap \chi(Y) \subset X$  (вложение строгое). Из доказанного следует: любая  
прямая дуга разреза  $(Z, \bar{Z})$ , где  $\bar{Z} = V^v \setminus Z$ , в сети  $\Gamma_0^v$  насыщена функ-

цией  $g$ , а на любой обратной — функция равна 0. Это противоречит тому, что все множество  $X$  достижимо из  $S$  активными путями. ■

На основании леммы 7 множество  $V^v$  можно разбить на 3 непересекающихся подмножества:  $X$ ,  $\chi(X)$  и  $W \equiv V^v \setminus \{X \cup \chi(X)\}$ . Очевидно, что если  $x^i \in W$ , то  $\chi(x^i) = x^{3-i} \in W$ .

Введем следующую классификацию дуг сети  $\Gamma^v$ . Дугу  $(x^i, y^j) \in E^v$  будем называть  $AB$ -дугой, где  $A$  и  $B$  — элементы множества символов  $\{S, T, W\}$  и выбираются по следующему правилу:  $A=S$ , если  $x^i \in X$ ;  $A=T$ , если  $x^i \in \chi(X)$ ;  $A=W$ , если  $x^i \in W$ ; аналогично для  $B$ , определяемому по  $y^j$ . Так, например, если  $x^i \in \chi(X)$ ,  $y^j \in \chi(X)$ , то  $(x^i, y^j)$  считается  $TT$ -дугой, а если  $x^i \in W$ ,  $y^j \in X$ , то  $WS$ -дугой.

Исследуем расположение подграфов-центров относительно разрезов  $R$  и  $\chi(R)$ . Центр  $H(x) = (V(x), E(x)) \subset \Gamma^v$  назовем *нерассекаемым*, если  $V(x) \subseteq W$  и *рассекаемым* — в противном случае. Пусть центр  $H(x)$  рассекаемый и пусть  $X(x^1) \subseteq V(x)$  (аналогично  $X(x^2) \subseteq V(x)$ ) — множество вершин вида  $x_s^1, s \in P(x)$ , (соответственно  $x_s^2$ ) принадлежащих  $X$ .

Случай А. Множество  $X(x^1)$  пусто. Тогда  $X \cap V(x) = X(x^2)$  (рис. 2). Из построения центра следует, что любая дуга сети  $\Gamma^v$ , входя-

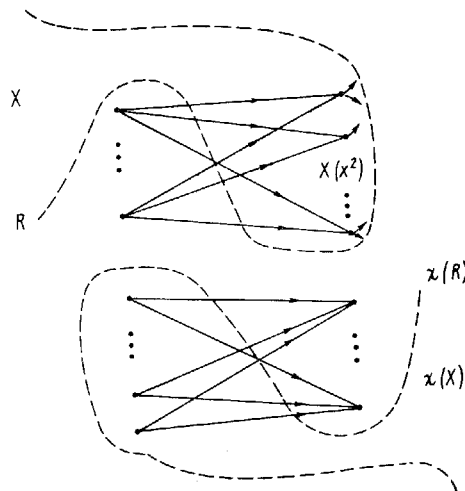


Рис. 2

щая в вершину вида  $x_s^2$ , может быть только дугой самого центра, и поэтому все такие дуги принадлежат  $\Gamma_0^v$  и поток  $f'$  на них — суть  $g$ . Для любого  $x_s^2 \in X(x^2)$  из того, что  $x_s^1 \notin X$ ,  $\forall s^1 \in P(x)$ , следует  $f^1(x_s^1, x_s^2) = g(x_s^1, x_s^2) = 0$ ,  $\forall s^1 \in P(x)$ , а это означает, что и на дугах, исходящих из вершин  $x_s^2 \in X(x^2)$ , поток  $f'$  равен нулю. Но тогда вершины  $x_s^2 \in X(x^2)$  не могут быть достижимы из  $S$  активными путями в сети  $\Gamma_0^v$ . Случай А невозможен.

Случай В.  $X(x^1) \neq \emptyset$ . Пусть  $x_s^1 \in X(x^1)$ . Поскольку для любого  $x_s^2, s^1 \in P(x) \setminus \{s\}$  имеется дуга  $(x_s^1, x_s^2) \in E(x)$  и  $c(x_s^1, x_s^2) = \infty$ , то  $x_s^2 \in X(x^2)$ ,  $\forall s^1 \in P(x) \setminus \{s\}$ . Но из того, что  $\chi(x_s^1) \in \chi(X)$  и  $\chi(x_s^2) \in \chi(X)$ ,  $\forall s^1 \in P(x) \setminus \{s\}$ , следует, что  $X(x^1) = \{x_s^1\}$  и  $X(x^2) = \{x_s^2, x^1 \in P(x) \setminus \{s\}\}$ .

(рис. 3). Отсюда, в частности, следует, что  $f'(x_s^1, x_s^2) = g(x_s^1, x_s^2) = 0$  при  $s' \neq s, s'' \neq s$ . Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 8. Пусть  $H(x) = (V(x), E(x))$  — рассекаемый центр

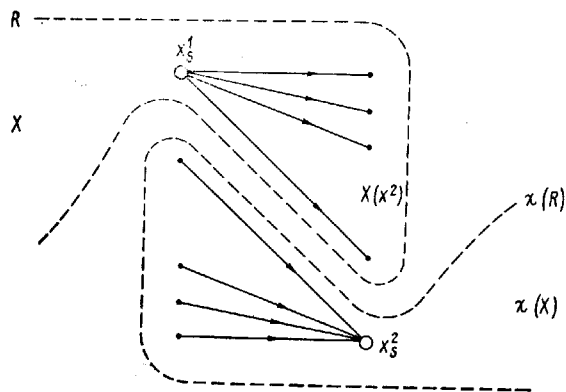


Рис. 3

и  $X(x^1) = \{x_s^1 \in V(x) | x_s^1 \in X\}$ ,  $X(x^2) = \{x_s^2 \in V(x) | x_s^2 \in X\}$ . Тогда: а) множество  $X(x^1)$  состоит из единственной вершины  $x_s^1$ , а множество  $X(x^2)$  равно  $\{x_s^2; s \in P(x) \setminus \{s\}\}$ ; б) поток  $f'$  отличен от нуля только быть может на дугах вида  $(x_s^1, x_s^2)$  и  $(x_s^1, x_s^2), s \in P(x) \setminus \{s\}$ . ■

2.3. Вторая часть итерации. Пусть  $\hat{\Gamma}^v = (\hat{V}^v, \hat{E}^v)$  — сеть, состоящая из  $S, T$  и из всех тех вершин и дуг сети  $\Gamma^v$ , которые лежат на  $S, T$ -путях сети  $\Gamma^v$ , не содержащих  $WS$ -,  $TW$ - и  $TS$ -дуг сети  $\Gamma_0^v$ . Сеть  $\hat{\Gamma}^v$  можно получить из  $\Gamma^v$  при помощи следующих двух процедур.

1) Удаление из сети  $\Gamma^v$  всех  $WS$ -,  $TW$ - и  $TS$ -дуг сети  $\Gamma_0^v$ . Заметим, что для таких дуг  $(x^i, y^j)$  выполняется

$$f'(x^i, y^j) = 0, \quad \forall \gamma(x^i, y^j) \Gamma = 0.$$

2) Удаление из полученной сети всех вершин и дуг, не принадлежащих  $ST$ -путям. Поскольку граф  $\Gamma^v$  — ациклический, то эта процедура заключается в последовательном удалении тупиковых и антитупиковых вершин (из  $V^v \setminus \{S \cup T\}$ ) и инцидентных им дуг. Полученная сеть и будет  $\hat{\Gamma}^v$ . Пусть для дуги  $(x^i, y^j) \in E^v$   $f'(x^i, y^j) > 0$ . Тогда дуга  $(x^i, y^j)$  принадлежит некоторой потоковой нити из  $S$  в  $T$  и, следовательно,  $(x^i, y^j) \in \hat{E}^v$ . Таким образом, поток  $f'$  целиком сосредоточен в подсети  $\hat{\Gamma}^v$ . Из определения сетей  $\Gamma_0^v$  и  $\hat{\Gamma}^v$  следует также, что для любой  $WS$ -,  $TW$ - или  $TS$ -дуги  $(x^i, y^j) \in \hat{E}^v$  выполняется  $f'(x^i, y^j) = c(x^i, y^j), \quad \forall \gamma(x^i, y^j) \Gamma > 0$ .

Лемма 9. 1)  $X \subset \hat{V}^v$ ; 2) на подмножестве вершин  $X$  ( $X(X)$ ) сети  $\Gamma^v$  и  $\hat{\Gamma}^v$  совпадают (т. е.  $\langle X \rangle_{\Gamma^v} = \langle X \rangle_{\hat{\Gamma}^v}$ ).

Доказательство. Фактически требуется доказать, что для любой дуги  $(x^i, y^j) \in E^v$ , такой, что  $x^i, y^j \in X$ , существует  $ST$ -путь, ее содержащий, не имеющий  $WS$ -,  $TW$ - и  $TS$ -дуг с нулевым потоком  $f'$ . Покажем сначала, что для любой вершины  $x^i \in X$  есть (ориентированный) путь такого рода, начинающийся в  $S$  и оканчивающийся в  $x^i$ . Поскольку  $x^i \in X$ , то в  $\Gamma_0^v$  существует активный путь  $\xi_{(s^1, x^i)}, s^1 \in S$ .

\*  $\langle Y \rangle_H$  означает подграф графа  $H$ , порожденный подмножеством его вершин  $Y$ .

Пусть  $(z^l, w^k)$  — последняя обратная дуга в  $\xi_{(s^l, x^l)}$ . Поскольку  $f'(z^l, w^k) > 0$ , то существует потоковая нить, проходящая через  $z^l$ . Искомый путь получается составлением носителя этой нити от  $S$  до  $z^l$  и участка пути  $\xi_{(s^l, x^l)}$  от  $z^l$  до  $x^l$ . Докажем теперь, что для любой вершины  $y^j \in X$  существует путь, не содержащий  $WS$ -,  $TW$ - и  $TS$ -дуг с нулевым потоком, идущий из  $y^j$  в  $T$ . Выберем некоторый путь  $\xi_{(y^j, t^2)}$ ,  $t^2 \in T$ , в сети  $\Gamma^v$  и пусть  $z^l$  — последняя вершина в нем, принадлежащая  $X$  и  $(z^l, w^k)$  — очередная дуга. Тогда  $(z^l, w^k)$  — это  $SW$ - или  $ST$ -дуга, поэтому  $f'(z^l, w^k) = c(z^l, w^k) > 0$  и искомый путь получается путем составления участка пути  $\xi_{(y^j, t^2)}$  от  $y^j$  до  $w^k$  и носителя некоторой потоковой нити от  $w^k$  до  $T$ . ■

Пусть дуга  $(x^i, y^j) \in \hat{E}^v$  не является дугой центра, тогда  $[x, y] = \chi \circ \psi(x^i, y^j)$  — ребро в  $G$ . Ребро  $[x, y]$  назовем: а)  $R^+$ -ребром ( $R^{++}$ -ребром), если  $(x^i, y^j)$  —  $SW$ - или  $WT$ -дуга (соответственно,  $ST$ -дуга) и б)  $R^-$ -ребром ( $R^{--}$ -ребром), если  $(x^i, y^j)$  —  $WS$ - или  $TW$ -дуга (соответственно,  $TS$ -дуга). Легко проверить, что определение корректно, т. е. что дуги  $(x^i, y^j)$  и  $(y^{3-j}, x^{3-i})$  одинаково классифицируют ребро  $[x, y]$ .

Из сказанного выше следует, что для  $R^-$ - и  $R^{--}$ -ребер  $[x, y]$   $\gamma[x, y] > 0$ .

Пусть  $\varepsilon_1 = \min\{\gamma[x', x'']; \frac{1}{2}\gamma[y', y'']\}$ , где минимум берется по всем  $R^-$ -ребрам  $[x', x'']$  и всем  $R^{--}$ -ребрам  $[y', y'']$ . Если  $R^-$ - и  $R^{--}$ -ребер нет, то положим  $\varepsilon_1 = \infty$ . Пусть  $\varepsilon$  — неотрицательное число, такое, что  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Определим функцию

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon[x, y] = \begin{cases} \gamma[x, y] + \varepsilon, & \text{если } [x, y] \text{ — } R^+ \text{-ребро;} \\ \gamma[x, y] - \varepsilon, & \text{если } [x, y] \text{ — } R^- \text{-ребро;} \\ \gamma[x, y] + 2\varepsilon, & \text{если } [x, y] \text{ — } R^{++} \text{-ребро;} \\ \gamma[x, y] - 2\varepsilon, & \text{если } [x, y] \text{ — } R^{--} \text{-ребро;} \\ \gamma[x, y] & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \quad [x, y] \in E$$

Из определения величины  $\varepsilon_1$  следует, что функция  $\gamma_\varepsilon$  неотрицательная. Будем обозначать  $\nu_\varepsilon$  функцию  $a + \gamma_\varepsilon$ .

Рассмотрим множество  $\mathcal{L}(\hat{\Gamma}^v)$   $ST$ -путей сети  $\hat{\Gamma}^v$ . Обозначим  $\hat{\mathcal{F}}(G, \nu)$  образ множества  $\mathcal{L}(\hat{\Gamma}^v)$  при отображении  $\chi \circ \psi$ ; это множество состоит, вообще говоря, из части  $P$ ,  $\nu$ -геодезических сети  $(G, \nu)$  (см. следствие 2).

Лемма 10. Существует такое  $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  (быть может равно  $\infty$ ), что при любом  $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon$ ,  $\mathcal{F}(G, \nu_\varepsilon)$  совпадает с  $\hat{\mathcal{F}}(G, \nu)$ .

Доказательство. Поскольку всех простых цепей в  $G$  — конечное число, длина каждой цепи на отрезке  $[0, \varepsilon_1]$  — непрерывная функция, и при  $\varepsilon = 0$  множество  $P$ ,  $\nu$ -геодезических есть  $\mathcal{F}(G, \nu)$ , то существует  $\varepsilon_2: 0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$  (быть может  $\varepsilon_2 = \infty$ ), такое, что при  $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_2$  в сети  $(G, \nu_\varepsilon)$  не будет  $P$ ,  $\nu_\varepsilon$ -геодезических, отличных от геодезических из  $\mathcal{F}(G, \nu)$  (если  $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , то  $\varepsilon_2$  определяет «момент» появления новой геодезической), таким образом  $\mathcal{F}(G, \nu_\varepsilon) \subseteq \mathcal{F}(G, \nu)$ .

Определим вектор-потенциалы  $\pi_\varepsilon(x^i)$ ,  $x^i \in V^v$ , равные:  $\pi(x^i)$ , при  $x^i \in X$ ;  $\pi(x^i) + \varepsilon$ , при  $x^i \in W$ ;  $\pi(x^i) + 2\varepsilon$ , при  $x^i \in \chi(X)$ . Из определения функций  $\gamma_\varepsilon$  и  $\nu_\varepsilon$  следует, что для любой дуги  $(x^i, y^j) \in E^v$ , не являющейся  $WS$ -,  $TW$ - или  $TS$ -дугой сети  $\Gamma^v$ , следует (при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ )

$$\nu_\varepsilon[x, y] = \gamma \pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i) \gamma, \quad (7)$$

а для являющейся таковой

$$v_\varepsilon[x, y] = \gamma[x, y] = \gamma \pi(y^j) - \pi(x^i) \Gamma = \gamma \pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i) \Gamma + \left\{ \frac{\varepsilon}{2\varepsilon} \right\}$$

или

$$v_\varepsilon[x, y] > \gamma \pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i) \Gamma \quad (8)$$

(для дуг центров  $(x_{s^1}^1, x_{s^2}^2)$  мы полагаем  $v_\varepsilon[x, x] = 0$ ). Рассмотрим произвольный  $ST$ -путь  $\xi_{(s^1, t^2)}$  в  $\Gamma^v$ , и пусть  $\tilde{\xi}_{s, t} = \kappa \circ \psi(\xi_{(s^1, t^2)})$ . Тогда на основании (7) и (8)

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(\tilde{\xi}_{s, t}) &\geq \Sigma_{(x^i, y^j) \in \xi_{(s^1, t^2)}} \gamma \pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i) \Gamma = \\ &= \gamma \pi_\varepsilon(t^2) - \pi_\varepsilon(s^1) \Gamma = m + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Если теперь путь  $\xi_{(s^1, t^2)}$  целиком лежит в  $\hat{\Gamma}^v$ , то (9) обращается в равенство  $v_\varepsilon(\tilde{\xi}_{s, t}) = m + 2\varepsilon$ , если же  $\xi_{(s^1, t^2)}$  не принадлежит  $\hat{\Gamma}^v$ , то в нем найдется дуга  $(x^i, y^j)$ , для которой справедливо (8), откуда  $v_\varepsilon(\tilde{\xi}_{s, t}) > m + 2\varepsilon$ . Итак мы показали, что при  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  цепи сети  $(\hat{G}, v_\varepsilon)$ , совпадающие с элементами из  $\hat{\mathcal{F}}(\hat{G}, v)$ , имеют длину  $m + 2\varepsilon$ , а цепи, совпадающие с элементами из  $\mathcal{F}(\hat{G}, v) \setminus \hat{\mathcal{F}}(\hat{G}, v)$ , имеют длину, большую  $m + 2\varepsilon$ . Следовательно,  $\mathcal{F}(\hat{G}, v_\varepsilon)$  совпадает с  $\hat{\mathcal{F}}(\hat{G}, v)$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}$ . ■

**2.4. Конструктивное определение  $\bar{\varepsilon}$  и проведение второй ч ст и итерации.** Величина  $\varepsilon_1$  равная  $\min\{\gamma[x', x'']; 1/2\gamma[y', y''], \infty\}$ , где  $[x', x'']$  —  $R^-$ -ребро, а  $[y', y'']$  —  $R^-$ -ребро, вычисляется непосредственно. Опишем алгоритм нахождения  $\varepsilon_2$ .

Обозначим  $\hat{G}(\hat{V}, \hat{E})$  подграф графа  $G$ , состоящий из множества вершин  $\hat{V} \equiv \kappa \circ \psi(\hat{V}^v)$  и множества ребер  $\hat{E} \equiv \kappa \circ \psi(\hat{E}^v)$ . Заметим, что для каждого ребра  $[x, y]$  сети  $G \setminus \hat{G} = (V, E \setminus \hat{E})$  выполняется  $\gamma[x, y] = \gamma_\varepsilon[x, y] = 0$ . Будем считать, что в сети  $G \setminus \hat{G}$  нет ребер  $[x, y]$ , таких, что  $x \in \hat{V}$ ,  $y \in \hat{V}$ . В противном случае каждое такое ребро  $[x, y]$  следует превратить в пару ребер  $[x, x']$ ,  $[x', y]$ , таких, что  $c[x, x'] = c[x', y] = c[x, y]$ ,  $a[x, x'] = a[x', y] = 1/2a[x, y]$ .\* Мы будем рассматривать *текущие потенциалы*  $\tilde{\pi}$ , представляющие собой линейные функции от  $\varepsilon$  и *2-элементы*  $\mathcal{E} = \{\tilde{\pi}, s\}$ , состоящие из некоторого текущего потенциала  $\tilde{\pi}$  и некоторого полюса  $s \in P$ . Каждой вершине  $x \in V$  сопоставим строку 2-элементов  $st(x) = \{\mathcal{E}_1(x), \mathcal{E}_2(x), \dots, \mathcal{E}_{k(x)}(x)\}$  по следующим правилам:

1.  $x \in \hat{V}$ . Если  $x$  — изолированный полюс в  $\hat{G}$ , то  $st(x)$  состоит из единственного элемента  $\{0, x\}$ . Иначе рассмотрим множество  $(\kappa \circ \psi)^{-1}(x) \subseteq \hat{V}^v$ , состоящее из двух элементов, если вершина  $x$  — нецентральная в  $(\hat{G}, v)$  и из  $2 \cdot |P(x)|$  элементов если центральная. Для каждого элемента  $\tilde{x}^j$  этого множества определяем совокупность  $P(\tilde{x}^j)$  полюсов, которые соответствуют источникам сети  $\hat{\Gamma}^v$ , из которых достижима вершина  $\tilde{x}^j$ . Тогда элемент  $\tilde{x}^j$  порождает в строке  $st(x)$  ровно  $|P(\tilde{x}^j)|$  2-элементов вида  $\{\tilde{\pi}(\tilde{x}^j), s\}$ ,  $s \in P(\tilde{x}^j)$ , где:

\* Такое предположение вводится только для удобства описания способа нахождения  $\varepsilon_2$ . В действительности можно обойтись без временного вставления новых вершин, повышающего размерность задачи.

$$\hat{\pi}(\tilde{x}^j) = \begin{cases} \neg \pi(\tilde{x}^j) | \neg, & \text{если } x^j \in X \\ \neg \pi(\tilde{x}^j) | \neg + \varepsilon, & \text{если } x^j \in W \\ \neg \pi(\tilde{x}^j) | \neg + 2\varepsilon, & \text{если } x^j \in \chi(X). \end{cases}$$

После порождения 2-элементов от всех вершин в  $(\alpha \circ \psi)^{-1}(X)$  повторяющиеся 2-элементы в  $st(x)$  можно удалить (повторяющиеся элементы возникают, если  $x$  — центр в  $(G, \nu)$ ). Из доказательства леммы 10 следует, что если в  $st(x)$  есть элемент  $\{\hat{\pi}, s\}$ , то при  $\varepsilon \leq \varepsilon$  вершина  $x$  будет находиться в сети  $(G, \nu_\varepsilon)$  на расстоянии  $\hat{\pi}(\varepsilon)$  от полюса  $s$ .

2.  $x \in V \setminus \hat{V}$ . Рассмотрим сеть  $G \setminus \hat{G} = (V, E \setminus \hat{E})$  и определим расстояния  $\rho_\nu(x, y)$  от вершины  $x$  до каждой вершины  $y \in \hat{V}$ . Строка  $st(x)$  получается соединением строк  $st(y)$  всех таких элементов  $y$ , что  $\rho_\nu(x, y) < \infty$ , и одновременным пересчетом текущих потенциалов: если  $st(y)$  содержит 2-элемент  $\{\hat{\pi}(y), s\}$ , то в строке  $st(x)$  порождается 2-элемент  $\{\hat{\pi}(y) + \rho_\nu(x, y), s\}$ .

Опишем теперь правило нахождения  $\varepsilon_2$ . Пусть  $st(x)$  — некоторая строка. Для каждой пары *разнополюсных* 2-элементов  $\mathcal{E}_1(x) = \{\hat{\pi}_i, s_i\}$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = \{\hat{\pi}_j, s_j\}$  этой строки (т. е. таких, что  $s_i \neq s_j$ ) рассмотрим уравнение  $\hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) = m + 2\varepsilon$ . Если решение этого уравнения единственно и положительно, то положим  $\varepsilon_{ij}(x)$  равным этому решению, в противном случае положим  $\varepsilon_{ij}(x) = \infty$ . Определим затем  $\varepsilon(x)$ , равное минимуму  $\varepsilon_{ij}(x)$  по всем разнополюсным элементам  $\mathcal{E}_i$  и  $\mathcal{E}_j$  ее строки, и, наконец, определим  $\varepsilon'_2 \equiv \min_{x \in V} \varepsilon(x)$ .

Лемма 11. Величины  $\varepsilon \equiv \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  и  $\varepsilon' \equiv \{\varepsilon_1, \varepsilon'_2\}$  равны.

Доказательство. Пусть  $\varepsilon_2$  конечно и  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ . Покажем, что  $\varepsilon'_2 \leq \varepsilon_2$ . Согласно лемме 10 при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$  мы имеем  $\mathcal{F}(G, \varepsilon_2) = \mathcal{F}(G, \nu) = \mathcal{F}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$ , а при  $\varepsilon = \varepsilon_2$  имеем  $\mathcal{F}(G, \nu_\varepsilon) \supset \mathcal{F}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$ . Пусть  $\xi_{s,t} \in \mathcal{F}(\hat{G}, \nu_\varepsilon) \setminus \mathcal{F}(G, \nu_\varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , т. е.  $\xi_{s,t}$  — цепь, становящаяся  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезической при  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . Рассмотрим два случая.

1) Цепь  $\xi_{s,t}$  целиком лежит в  $\hat{G}$ . Используя лемму 2 можно доказать, что в  $\xi_{s,t}$  найдутся два идущих подряд ребра  $[y, x]$  и  $[x, z]$ , не принадлежащих никакой  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезической ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ). Пусть  $[y, x] \in \xi_{s',t'}$ ,  $[x, z] \in \xi_{s'',t''}$ , где  $\xi_{s',t'} \in \mathcal{F}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$ ,  $\xi_{s'',t''} \in \mathcal{F}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$  и пусть для определенности  $\xi_{s',t'} = \langle s', y, x, t' \rangle \xi'$ ,  $\xi_{s'',t''} = \langle s'', x, z, t'' \rangle \xi''$  (рис. 4). Тогда, применяя лемму 2 к  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическим  $\xi_{s',t'}$  и  $\xi_{s'',t''}$  с общим ребром  $[x, y]$ , получаем  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическую  $\tilde{\xi}_{s',t'} \equiv \xi_{s',x} \cdot \xi_{x,t}$  и, далее, применяя лемму 2 к  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическим  $\tilde{\xi}_{s',x}$  и  $\xi_{s'',t''}$ , получаем  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическую  $\tilde{\tilde{\xi}}_{s',t''} \equiv \tilde{\xi}_{s',x} \cdot \xi_{x,t''}$ , т. е. мы получили  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическую (не являющуюся  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезической при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ), составленную из участков двух  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезических  $\xi_{s',t'}$  от  $s'$  до  $x$  и  $\xi_{s'',t''}$  от  $x$  до  $t''$ . Следовательно, в строке  $st(x)$  найдутся 2-элементы  $\{\hat{\pi}_i, s'\}$  и  $\{\hat{\pi}_j, t''\}$  и соответствующее уравнение  $\hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) = m + 2\varepsilon$  имеет решение  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . Таким образом  $\varepsilon'_2 \leq \varepsilon_2$ .

2)  $\xi_{s,t}$  не принадлежит  $\hat{G}$ . Тогда в  $\xi_{s,t}$  найдется вершина  $x \in V \setminus \hat{V}$ . Пусть  $y$  и  $z$  — ближайшие к  $x$  «слева» и «справа» вершины цепи  $\xi_{s,t}$ , принадлежащие  $\hat{V}$ . Если  $y$  — не полюс, то возьмем произвольную  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическую  $\xi'_{s',t'}$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ), проходящую через  $y$ .

Легко показать, что из участка  $P, \nu_{\varepsilon_2}$ -геодезической  $\xi_{s,t}$  от  $y$  до  $t$  и одного из двух участков цепи  $\xi'_{s',t'}$  (от  $s'$  до  $y$  или от  $y$  до  $t'$ ) можно составить  $P, \nu_{\varepsilon_2}$ -геодезическую (пусть это будет  $\tilde{\xi}_{s',t}$ ). Про-

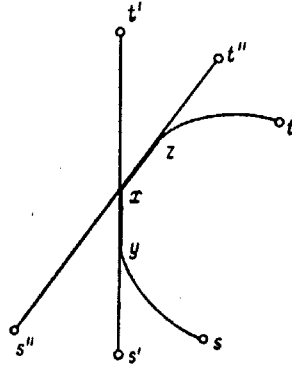


Рис. 4

делаем аналогичное для вершины  $z$ , в результате получим  $P, \nu_{\varepsilon_2}$ -геодезическую (скажем,  $\tilde{\xi}_{s',t''}$ ), содержащую участки  $P, \nu$ -геодезических от  $s'$  до  $y$  и от  $z$  до  $t''$ . Следовательно, в строке  $st(x)$  имеются 2-элементы  $\{\hat{\pi}_i, s'\}$  и  $\{\hat{\pi}_j, t''\}$ , образовавшиеся из 2-элементов  $\{\hat{\pi}_i(y), s'\}$  и  $\{\hat{\pi}_j(z), t''\}$  прибавлением, соответственно,  $\rho_\nu[y, x]$  и  $\rho_\nu[z, x]$ ; уравнение  $\hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) = m + 2\varepsilon$  имеет единственное решение  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , откуда  $\varepsilon'_2 \leq \varepsilon_2$ .

Покажем теперь, что  $\varepsilon'_2 \geq \varepsilon_2$  (считаем, что  $\varepsilon'_2 < \varepsilon_1$ ). Легко проверить, что каждый 2-элемент  $\{\hat{\pi}, s\}$  строки  $st(x)$  задает оценку  $\rho_{\nu_\varepsilon}[s, x] \leq \pi(\varepsilon)$  при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Пусть теперь  $\varepsilon'_2$  определяется из решения уравнения  $\hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) = m + 2\varepsilon$  для разнополюсных 2-элементов  $\{\hat{\pi}_i, s\}$  и  $\{\hat{\pi}_j, t\}$  строки  $st(x)$ . Поскольку при  $\varepsilon < \varepsilon'_2$  справедливо  $\hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) > m + 2\varepsilon$ , то, учитывая линейность уравнения, при  $\varepsilon > \varepsilon'_2$  имеем

$$\rho_{\nu_\varepsilon}[s, t] \leq \rho_{\nu_\varepsilon}[s, x] + \rho_{\nu_\varepsilon}[x, t] \leq \hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) < m + 2\varepsilon.$$

Но поскольку  $\varepsilon'_2 < \varepsilon_1$ , то, согласно доказательству леммы 10, причина возникновения неравенства  $\rho_{\nu_\varepsilon}[s, t] < m + 2\varepsilon$  при  $\varepsilon > \varepsilon'_2$  заключается в том, что появилась новая  $P, \nu_\varepsilon$ -геодезическая, откуда  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon'_2$ . ■

Таким образом, определение числа  $\varepsilon_2$  состоит в построении множеств  $st(x)$ ,  $\forall x \in V$  (каждое множество  $st(x)$  содержит не более  $|P| \cdot |\hat{V}|$ ) 2-элементов и в решении соответствующих линейных уравнений, откуда следует, что нахождение числа  $\varepsilon$  — эффективная\* процедура.

Пусть  $\bar{\varepsilon} < \infty$ . Определив функции  $\gamma' = \gamma'_\varepsilon$  и  $\nu' = \gamma' + a$ , строим, исходя из сети  $(G, \nu')$ , сети  $G_{\nu'}$ ,  $\bar{G}_{\nu'}$  и  $\Gamma_{\nu'}$ . Сеть  $G_{\nu'}$  можно получить, определяя для каждого полюса  $s \in P$  граф  $G_s$  кратчайших путей, соединяющих  $s$  с остальными вершинами, при помощи модификации какого-нибудь из алгоритмов нахождения дерева кратчайших путей (например,

\* Т. е. имеющая полиномиальную от  $|V|$  верхнюю оценку числа действий.

[29, 9]). Далее  $G_s$  последовательно «очищается» от вершин и дуг, лежащих на путях длины  $m + 2\bar{\varepsilon}$  из  $s$  в остальные полюсы; объединяя такие «очищенные» графы  $G_s$  и получим  $G_v$ . Можно предложить и другую, более экономную, процедуру построения  $G_v$ . Построение сети  $\tilde{G}_v$  из  $G_v$  и сети  $\Gamma^{v'}$  из  $\tilde{G}_v$  затруднений не вызывает. Обозначим  $\kappa': \tilde{G}_v \rightarrow G_v \subseteq G$ ,  $\psi': \Gamma^{v'} \rightarrow \tilde{G}_v$  и  $\chi': \Gamma^{v'} \rightarrow \Gamma^v$  соответствующие отображения (аналогичные  $\kappa$ ,  $\psi$  и  $\chi$ ).

Ребру  $[x, y] \in E$  соответствуют в сети  $\Gamma^v$  две дуги  $(x^i, y^j)$  и  $(y^{3-i}, x^{3-i})$ , а в сети  $\Gamma^{v'} - (x^{i'}, y^{j'})$  и  $(y^{3-i'}, x^{3-i'})$ , поэтому можно говорить о взаимнооднозначном соответствии  $\beta$  между дугами сетей  $\Gamma^v$  и  $\Gamma^{v'}$ , не являющихся дугами центров (дуга  $(x^i, y^j)$  переходит в  $(x^{i'}, y^{j'})$ , а дуга  $(y^{3-i}, x^{3-i}) - (y^{3-i'}, x^{3-i'})$ ). Покажем теперь, как «перенести» поток  $f'$  из сети  $\Gamma^v$  в сеть  $\Gamma^{v'}$ . Сначала определим поток  $f'$  на дугах сети  $\Gamma^{v'}$ , не являющихся дугами центров, положив  $f'(x^{i'}, y^{j'}) = f'(x^i, y^j)$ , где  $(x^{i'}, y^{j'}) = \beta(x^i, y^j)$ , а затем доопределим функцию  $f'$  до потока на дугах центров. Последнее всегда можно сделать (быть может, неоднозначно). Ход доказательства следующий: поток  $f'$  в сети  $\tilde{\Gamma}^v$  «течет по путям» из  $\mathcal{L}(\tilde{\Gamma}^v)$ ; поскольку  $\kappa \circ \psi(\mathcal{L}(\tilde{\Gamma}^v)) = \mathcal{F}(\tilde{G}, v_\varepsilon) \subseteq \mathcal{F}(G, v')$ ,  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ , и  $\kappa' \circ \psi'(\mathcal{L}(\Gamma^{v'})) = \mathcal{F}(G, v')$ , то можно говорить о «вложении» множества путей  $\mathcal{L}(\tilde{\Gamma}^v)$  в множество путей  $\mathcal{L}(\Gamma^{v'})$ , что и доказывает возможность доопределения  $f'$  в сети  $\Gamma^{v'}$  по соответствующим путям. Практически доопределение функции  $f'$  в дугах центров осуществляется тривиально.

Поскольку неравенство  $\gamma'[x, y] > 0$  возможно только при  $[x, y] \in \tilde{E}$  и  $\tilde{E} \subseteq E_v$ , то условие А выполняется. Справедливость условия В следует из того, что функция  $\gamma[x, y]$  изменялась только для тех ребер  $[x, y]$ , для которых потоком  $f'$  заполнены дуги из  $(\kappa \circ \psi)^{-1}[x, y]$ , а значит и дуги из  $(\kappa' \circ \psi')^{-1}[x, y]$ .

Таким образом, в случае  $\bar{\varepsilon} < \infty$ , мы определили исходные объекты  $v'$ ,  $G_{v'}$ ,  $\tilde{G}_v, \Gamma^{v'}$  и  $f'(i+1)$ -й итерации алгоритма  $\mathfrak{A}(K_p, \text{cost})$ .

**2.5. Сходимость и оценка алгоритма.** Определим  $\tilde{f} \equiv \equiv 1/2(f' + \chi(f')) -$  поток, полученный симметризацией потока  $f'$ .

Лемма 12. Если на очередной ( $i$ -й) итерации оказалось  $\bar{\varepsilon} = \infty$ , то поток  $F^{\tilde{f}}$  является решением задачи  $\langle a, K_p | c \rangle$ .

Доказательство. Выберем такое  $\bar{\varepsilon}$ , что  $M = m = 2\bar{\varepsilon} \geq M_0$  и рассмотрим сеть  $(G, v_\varepsilon)$ . Поскольку  $\varepsilon_1 = \infty$ , то функция  $\gamma_\varepsilon$  неотрицательна, а ввиду  $\varepsilon_2 = \infty$  кратчайшее расстояние  $\rho_{v_\varepsilon}$  между полюсами равно  $m + 2\bar{\varepsilon}$ , т. е.  $a + \gamma_\varepsilon - K_p, M$ -функция. На основании леммы 10 мультипоток  $F^{\tilde{f}}$  течет по  $P$ ,  $v_\varepsilon$ -геодезическим, т. е. выполнено (2). Из выполнения условия В для сети  $\Gamma^v$  и потока  $f'$  и симметричности функции  $\gamma(x^i, y^j)$  следует выполнение условия В и для  $\tilde{f}$ , откуда следует насыщенность мультипоток  $F^{\tilde{f}}$  ребер  $[x, y] \in E$  таких, что  $\gamma[x, y] > 0$ . Изменение функции  $\gamma$  происходит опять-таки на ребрах, соответствующих дугам сети  $\tilde{\Gamma}^v$ , заполненным потоком:  $f'$  и, следовательно, потоком  $\tilde{f}$ . Таким образом, для сети  $(G, v_\varepsilon)$  и мультипотока  $F^{\tilde{f}}$  выполняется соотношение (6). Из всего сказанного следует оптимальность мультипотока  $F^{\tilde{f}}$  (см. в конце § 1). ■

Сходимость алгоритма. Назовем  $i$ -ю итерацию алгоритма позитивной, если построенный на ней поток  $f'$  имеет большую мощность, чем исходный поток  $f$ , и негативной, если  $\|f'\| = \|f\|$ .



**Лемма 13.** Число идущих подряд негативных итераций не более  $n-p$ , где  $n$  — число вершин,  $p$  — число полюсов сети  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $(i+1)$ -я итерация — негативная, и  $X'$  — множество вершин подсети допустимых дуг  $\Gamma_0^v$ , достижимых из  $S$ . Из предыдущего (см. леммы 9, 10, следствие 2 и построение потока  $f'$  в сети  $\Gamma^v$ ) следует, что  $x \circ \psi(X) \subset x' \circ \psi'(X')$ . Докажем, что вложение строгое, т. е.  $x \circ \psi(X) \subset x' \circ \psi'(X')$ . Поскольку минимальное возможное число элементов в  $x \circ \psi(X) = p$ , а максимальное —  $n$ , то отсюда и будет следовать утверждение леммы. Пусть  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$  и  $[x, y]$  — ребро в  $G$ , на котором было  $\gamma[x, y] > 0$  и стало  $\gamma_{\bar{\varepsilon}}[x, y] = 0$ . Пусть  $[x, y]$  —  $R^-$ -ребро и множество  $(x \circ \psi)^{-1}[x, y]$  состоит из дуг  $(x^i, y^j)$ ,  $(y^{3-j}, x^{3-i})$  (пусть для определенности  $x^i, x^{3-i} \in W$ ,  $y^j \in X$ ,  $y^{3-j} \in \chi(X)$ ). Тогда дуга  $(x^i, y^j)$  насыщена потоком  $f'$  и поскольку соответствующая ей дуга  $(x^{i'}, y^{j'}) = \beta(x^i, y^j)$  уже принадлежит  $E_0^v$ , то вершина  $x^{i'}$  будет помечена, откуда  $x \in x' \circ \psi'(X')$ .

Пусть  $[x, y]$  —  $R^-$ -ребро и  $x^i, y^{3-j} \in \chi(X)$ , а  $y^j, x^{3-i} \in X$ . Тогда аналогично будет помечена вершина  $x^i$ , а это означает «прорыв» из «старого» множества  $X$  в «старое»  $\chi(X)$ , т. е. в этом случае поток увеличивается и итерация позитивная. Пусть теперь  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  определялось из уравнения  $\hat{\pi}_i(\varepsilon) + \hat{\pi}_j(\varepsilon) = m + 2\varepsilon$  для 2-элементов  $\{\hat{\pi}_i, s\}$  и  $\{\hat{\pi}_j, t\}$  из  $st(x)$ . Если  $x \in \hat{V}$ , то, как можно убедиться, вершина  $x$  становится центральной при  $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ , а это означает, что в сети  $\Gamma_0^v$  возникает «прорыв» из «старого»  $X$  в «старый»  $\chi(X)$  через возникший центр  $(x' \circ \psi')^{-1}(x)$ . Пусть теперь  $x \in \hat{V} \setminus \hat{V}$  и  $y, z$  — вершины, определенные в доказательстве леммы 11. Тогда возможна одна из трех ситуаций:

- а)  $(x \circ \psi)^{-1}(y) \subset X \cup \chi(X)$ ,  $(x \circ \psi)^{-1}(z) \subset X \cup \chi(X)$ ;
- б)  $(x \circ \psi)^{-1}(y) \subset W$ ,  $(x \circ \psi)^{-1}(z) \subset X \cup \chi(X)$ ;
- в)  $(x \circ \psi)^{-1}(y) \subset X \cup \chi(X)$ ,  $(x \circ \psi)^{-1}(z) \subset W$ .

Можно показать, что соответствующая цепь  $\xi_{y,z} \subset G \setminus \hat{G}$  в первом случае обеспечивает «прорыв» из «старого»  $X$  в «старый»  $\chi(X)$ , т. е.  $(i+1)$ -я итерация будет позитивной, а во втором и третьем случаях как минимум пополнение «старого» множества  $x \circ \psi(X)$  (во втором случае вершиной  $y$ , в третьем — вершиной  $z$ ). ■

Для обоснования конечности общего числа итераций алгоритма нам осталось доказать конечность числа позитивных итераций. Пусть  $\xi_{s^1, t^2}$ , где  $s^1 \in S'$ ,  $t^2 \in T$  — некоторый активный путь в сети  $\Gamma_0^v$ , при помощи которого произошло одно из увеличений потока на рассматриваемой позитивной итерации (увеличивающий путь). Образ  $\tilde{\xi}_{s,t}$  пути  $\xi_{(s^1, t^2)}$  при отображении  $x \circ \psi$  — это цепь в графе  $G$ , соединяющая полюса  $s$  и  $t$  (быть может, одинаковые) и проходящая через каждую вершину не более двух раз (назовем такую цепь 2-маршрутом). Если дуга  $(x^i, y^j)$  — прямая (обратная) в увеличивающем пути  $\xi_{s^1, t^2}$ , то соответствующее звено  $\{x, y\}$  в  $\tilde{\xi}_{s,t}$  назовем прямым (обратным) и его длиной  $l\{x, y\}$  будем считать величину  $a[x, y]$  (соответственно,  $-a[x, y]$ ); положим также  $l(\tilde{\xi}_{s,t}) \equiv \sum_{\{x,y\} \in \tilde{\xi}_{s,t}} l\{x, y\}$ . Очевидно  $l(\tilde{\xi}_{s,t}) = m$ . При переходе от одной итерации к другой расстояние  $m$  между ближайшими полюсами, как следует из леммы 10, увеличивается, поэтому любые два маршрута, отвечающие двум увеличивающим путям из  $s$  в  $T$  различных позитивных итераций различны. Следовательно, число различных позитивных итераций не превосходит числа различных 2-маршрутов с фиксированным разбиением на прямые и обратные звенья

(или бинарных 2-маршрутов), а число таких маршрутов конечно (обозначим его  $\mathcal{N}(G)$ ). Поэтому общее число итераций в алгоритме не более  $(n-p)\mathcal{N}(G)$ , т. е. алгоритм конечен.

Рассмотрим некоторые случаи сетей.

1) Функция  $c = c[x, y]$ ,  $[x, y] \in E$  — целочисленная ( $c$  — целочисленная сеть). Тогда текущий поток  $f$  всегда целочисленный и, следовательно, поэтому на позитивных итерациях поток увеличивается по крайней мере на единицу и, следовательно, общее число итераций не более  $2(n-p)\sum_{[x,y] \in E} c[x, y]$ . Алгоритм  $\mathfrak{A}(K_p, \text{Cost})$  в этом случае гарантирует получение полуцелочисленного решения (т. е. дробность решения не хуже чем для «обыкновенной» свободной задачи).

2) Функция  $a = a[x, y]$  — целочисленная ( $a$  — целочисленная сеть). Тогда число позитивных итераций не превосходит длины самого длинного 2-маршрута и может быть оценено, как  $2\sum_{[x,y] \in E} a[x, y]$ , а общее число итераций  $2(n-p)\sum_{[x,y] \in E} a[x, y]$ .

3) Разрешим функции  $a = a[x, y]$  не быть строго положительной. Решения такой задачи можно осуществить двумя способами. Способ первый заключается в том, чтобы ребрам  $[x, y]$  для которых  $a[x, y] = 0$ , придать достаточно малые положительные стоимости, так чтобы это не повлияло на решение исходной задачи. Пусть  $\alpha = \min\{|a(\xi') - a(\xi'')|\}$ , где минимум берется по всем парам различных бинарных 2-маршрутов  $\xi', \xi''$ , соединяющих полюса, причем таких, что  $a(\xi') \neq a(\xi'')$ . Если положить на ребрах, для которых  $a[x, y] = 0$ , новые стоимости  $a[x, y] = \alpha/2n + 1$ , то длина каждого бинарного 2-маршрута изменится (увеличится) менее чем на  $\alpha$ , поэтому если длина одного маршрута была больше длины другого маршрута, то это соответствие сохранится. Отсюда можно вывести, что алгоритм будет отыскивать требуемое решение. Второй способ представляется более предпочтительным. Он заключается в замене функции  $a$  двухкомпонентной вектор-функцией  $\tilde{a}$ :

$$\tilde{a}[x, y] = \begin{cases} (a[x, y], 0), & \text{если } a[x, y] > 0; \\ (0, 1), & \text{если } a[x, y] = 0; \end{cases}$$

$[x, y] \in E$ , и в дальнейшей работе с вектор-функцией  $\tilde{a}$  также, как это описано для числовой функции  $a$  (заметим, что в сетях  $\tilde{A}_v$  и  $\Gamma^v$  мы будем иметь дело уже с трехкомпонентными векторами). Обоснование алгоритма целиком переносится на рассматриваемый случай, поэтому алгоритм будет конечен и будет иметь указанную выше оценку числа итераций. Обратим внимание на случай  $a$ -целочисленной сети. В этом случае число различных вектор-длин бинарных 2-маршрутов может быть оценено как  $2n \cdot 2\sum_{[x,y] \in E} a[x, y]$ , поскольку значение первой компоненты вектор-длины целочисленно и не превосходит  $2\sum_{[x,y] \in E} a[x, y]$ , а вторая — не превосходит  $2n$ .

Подведем итог сказанному в следующей теореме.

**Т е о р е м а 2.** Алгоритм  $\mathfrak{A}(K_p, \text{Cost})$  решает задачу  $\langle a, K_p | c \rangle$  при произвольных  $V, P, a \in \mathcal{E}_+, c \in \mathcal{E}_+$  т. е. для произвольной сети  $N = (V, P; c)$  и функции стоимости  $a \in \mathcal{E}_+$ , причем:

а) если функции  $a, c$  — произвольные, то число действий в алгоритме оценивается сверху как  $O(\mathcal{N}(G) \cdot P |V|)$ , где  $\mathcal{N}(G)$  — число различных бинарных 2-маршрутов, оканчивающихся в  $P$ , в графе  $G = (V, E)$  (где  $E = \{[x, y] \in [V]^2 | c[x, y] > 0\}$ ), а  $P(|V|)$  — некоторый полином от  $|V|$ ;

\* Этот полином связан с оценкой трудоемкости выполнения одной итерации.

