А. В. Карзанов

ЗАДАЧА О МАКСИМАЛЬНОМ МУЛЬТИПОТОКЕ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

В настоящей статье описывается алгоритм решения стоимостных мультипотоковых задач класса $\langle K_p, \mathrm{Cost} \rangle$. Приведем постановку задач этого типа, данную в [I]. Рассматривается неориентированная потоковая сеть $N=(V, P; c)$ с множеством вершин V, множеством полюсов $P: P \subseteq V$ и функцией пропускной способности $c \in \mathscr{E}_+ : c[x, y]$, $[x, y] \in [V]^d$ (где $[V]^d$ — множество неупорядоченных пар различных вершин $x, y \in V$, а $\mathscr{E}_+ \equiv \mathscr{E}_+^{[V]^d}$ — неотрицательный ортант эвклидова пространства $\mathscr{E} \equiv \mathscr{E}^{[V]^d}$ действительно-значных функций на $[V]^d$). На множестве $[V]^d$ задана функция стоимости $a \in \mathscr{E}_+$, и имеется некоторый неориентированный граф $S=(P, U)$ — потоковая схема задачи. Задача $\langle a, S \mid c \rangle$ заключается в нахождении мультипотока $F=\{f_{st};\ [s, t] \in U\}$, для которого выполняются ограничения по пропускной способности

$$\zeta_F[x, y] \equiv \Sigma_{[s,\,t] \in U} \zeta_{f_{st}}[x, y] \equiv \Sigma_{[s,\,t] \in U} (f_{st}(x, y) + f_{st}(y, x)) \leqslant c[x, y],$$
$$\forall [x, y] \in [V]^d$$

и такого, что его мощность

$$\| F \| \equiv \Sigma_{[s,\,t] \in U} \| f_{s,\,t} \|,$$

где $\| f_{s,\,t} \| = |\operatorname{div}_{f_{st}}(s)| = |\operatorname{div}_{f_{st}}(t)|$ максимальна и при этом величина

$$a \cdot \zeta_F \equiv \Sigma_{[x,\,y] \in [V]^d} a[x, y] \cdot \zeta[x, y]$$

(стоимость мультипотока) минимальна. Мы рассматриваем класс задач $\{\langle K_p, \mathrm{Cost} \rangle,\ p \in \overline{3, \infty}\}$; каждая «массовая» задача $\langle K_p, \mathrm{Cost} \rangle$ объединяет множество конкретных задач $\langle a, K_p \mid c \rangle$ при произвольных множестве V, функциях a, $c \in \mathscr{E}_+^{[V]^d}$ и при фиксированной потоковой схеме S, являющейся полным графом K_p на множестве полюсов P (здесь $p=|P|$), т. е. $S=(P, [P]^d)$. Иначе говоря, мы рассматриваем такие задачи о максимальном мультипотоке минимальной стоимости, для которых учитываются потоки, соединяющие любую пару различных полюсов сети. Для облегчения записи рассматриваемый класс задач будет обозначаться $\langle K_p, \mathrm{Cost} \rangle$ (имеется в виду, что p пробегает значения от 3 до ∞), предлагаемый алгоритм решения задач этого класса обозначается через $\mathfrak{A}\langle K_p, \mathrm{Cost} \rangle$. Алгоритм пригоден и для решения задачи $\langle K_2, \mathrm{Cost} \rangle$, известной как задача о максимальном потоке минимальной стоимости (для неориентированной сети); работа алгоритма $\mathfrak{A}\langle K_p, \mathrm{Cost} \rangle$ в этом случае вырождается (с некоторыми избыточностями) в работу классического алгоритма Л. Форда и Д. Фалкерсона (см. [1, гл. III]).

Пусть $\nu \in \mathscr{E}_+$ — некоторая функция. Для произвольной цепи $\xi=(x_0, e_0, x_1, e_1, \ldots, x_k)$, где $x_i \in V$, $e_i=[x_i, x_{i+1}] \in [V]^d$ ее *ν-длиной* считается величина $\nu(\xi) \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \nu(e_i)$. Функция ν определяет метрику ρ_ν на V: $\rho_\nu[x, y]$ ($[x, y] \in [V]^d$) равно ν-длине цепи, минимальной среди всех цепей, соединяющих x и y.

Для задачи $\langle a, S \mid c \rangle$ в работе [I] была установлена следующая теорема двойственности.

Теорема 1. Мультипоток F является решением задачи $\langle a, S|c \rangle$ (в сети $N=(V, P; c)$ с потоковой схемой $S=(P, U)$) тогда и только тогда, когда для любого M, большего некоторого положительного числа $M_0=M(a)$ найдется такая функция $\gamma:\gamma[x, y]\geqslant 0$, $[x, y]\in[V]^d$, что:

$\rho_{\alpha+\gamma}[s, t]\geqslant M$ для любой пары $s, t\in P$: $[s, t]\in U$; (1)

для любой потоковой нити φ_L мультипотока F ее носитель — цепь L — является кратчайшей цепью (геодезической) метрики $\rho_{\alpha+\gamma}$; (2)

если $\gamma[x, y]>0$ для некоторого $[x, y]\in[V]^d$, то $\zeta_F[x, y]=c[x, y]$, т. е. ребро $[x, y]$ насыщено мультипотоком F. (3)

Для функций $\nu\in\mathscr{E}_+$, таких что $\rho_\nu[s, t]\geqslant M$ при $[s, t]\in U$, будет употребляться название S, M*-функция* (где $S=(P, U)$). Исключив из множества $[V]^d$ такие пары $[x, y]$, что $c[x, y]=0$, мы получаем *граф* $G=(V, E)$ *сети* N. Очевидно, можно считать (хотя это и не слишком существенно для изложения алгоритма), что граф G — связен и что $a[x, y]=0$ для $[x, y]\in[V]^d\setminus E$. В дальнейшем будет предполагаться, что звенья всех рассматриваемых цепей принадлежат E, вводимые в рассмотрение функции, будут задаваться на E, а возникающие метрики будут определяться как расстояния во взвешенном графе G.

Предлагаемый алгоритм можно отнести к большой группе комбинаторных алгоритмов математического программирования и дискретной математики, восходящим к идеям прямо-двойственного метода линейного программирования. Как и упомянутый выше алгоритм Форда—Фалкерсона для задачи о максимальном потоке минимальной стоимости, алгоритм $\mathfrak{a}<K_p$, Cost$>$ устроен в виде последовательности этапов, и на каждом из них решается нестоимостная задача в определенной (допустимой) подсети; при переходе от одного этапа к другому минимальное расстояние между полюсами увеличивается до тех пор, пока не станет достаточно большим — тогда задача будет решена. Задача каждого этапа в общих чертах следующая: в подграфе $G'=(V', E')$ графа G для данной функции $\gamma:\gamma[x, y]$, $[x, y]\in E'$, построить мультипоток максимальной мощности, «текущий по геодезическим» метрики $\rho_{a+\gamma}$. Для решения этой задачи применяется центральная идея работы — конструирование *накрывающих сетей*: оказывается, можно устроить некоторую «удвоенную» сеть (*накрытие* данной сети), любой симметричный поток который интерпретирует мультипоток в G', текущий по геодезическим.

Алгоритм $\mathfrak{a}<K_p$, Cost$>$ конечен для произвольных сетей. Если функция c — целочисленная, то алгоритм строит полуцелочисленное решение, т. е. дробность решения задачи $<a, K_p|c>$ такая же, как и для ее нестоимостного аналога — «свободной» задачи $<K_p|c>$.

§ 1. P, ν-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И НАКРЫВАЮЩИЕ СЕТИ

1.1. Определим сеть (G, ν) — объект, состоящий из графа G с функцией пропускной способности ребер c и некоторой функции ν, заданной на E. Мы будем рассматривать только *положительные* функции ν (т. е. $\nu[x, y]>0$, $\forall[x, y]\in E$).

Пусть $m=\min_{s,t\in P}\rho_\nu[s, t]$ — минимальное расстояние между полюсами, задаваемое функцией ν. Цепь $\xi_{s,t}$, соединяющую полюса s и t, назовем P, ν*-геодезической*, если $\nu(\xi_{s,t})=m$. Множество P, ν-геодезических сети (G, ν) обозначим $\mathscr{T}(G, \nu)$. Ребра и вершины сети, принадлежащие каким-либо P, ν-геодезическим будем называть, соответственно, P, ν*-ребрами* и P, ν*-вершинами*. К множеству P, ν-вершин отнесем также все полюса. Подграф графа G, состоящий из всех P, ν-вершин и P, ν-ребер обозначим $G_\nu=(V_\nu, E_\nu)$. Для каждого $x\in V_\nu$ определим числа $\pi^1(x)\equiv\min_{s\in P}\rho_\nu[s, x]$ и $\pi^2(x)\equiv m-\pi^1(x)$, называемые, соответственно, *первым* и *вторым потенциалом* вершины x, а также множества $P^1(x)=\{s\in P:\rho_\nu[s, x]=\pi^1(x)\}$ и $P^2(x)=\{s\in P:\rho_\nu[s, x]=\pi^2(x)\}$. Из определения P, ν-вершины следует, что $\pi^1(x)\leqslant m/2$, $\pi^2(x)\geqslant m/2$. В случае $\pi^1(x)=\pi^2(x)=m/2$ получаем $P^1(x)=P^2(x)$. Заметим также, что $P^2(x)$ может быть пусто, только если $x\in P$. Если $\pi^1(x)<m/2$, то множество $P^1(x)$ содержит, очевидно, ровно один элемент (ближайший полюс), если же $\pi^1(x)=m/2$, то в $P^1(x)$ — не менее двух элементов. Вершину x назовем *простой центральной вершиной*, если $|P^1(x)|=2$, и *сложной*, если $|P^1(x)|\geqslant 3$. Для центральной вершины x положим $P(x)\equiv P^1(x)=P^2(x)$.

Лемма 1. Если $[x, y]\in E_\nu$, то (с точностью до перестановки x и y) выполняется, по крайней мере, одно из двух условий:

а) $\pi^1(y)-\pi^1(x)=\nu[x, y]$; б) $\pi^2(y)-\pi^1(x)=\nu[x, y]$ и $P^1(x)\neq P^1(y)$.

Доказательство. Рассмотрим некоторую P, ν-геодезическую $\xi_{s,t}$ $(s, t\in P)$, содержащую ребро $[x, y]$, и пусть для определенности вершина x расположена к полюсу s ближе, чем y. Тогда, очевидно, $\rho_\nu[s, x]+\nu[x, y]+\rho_\nu[y, t]=m$ или $\rho_\nu[x, y]-\rho_\nu[s, x]=\nu[x, y]$. Поскольку $\nu[x, y]>0$, то или $\rho_\nu[s, x]<m/2$ или $\rho_\nu[y, t]<m/2$; будем считать, что $\rho_\nu[s, x]<m/2$, откуда $P^1(x)=\{s\}$, $\rho_\nu[s, x]=\pi^1(x)$. Если теперь $\rho_\nu[s, y]<m/2$, то получаем $\rho_\nu[s, y]=\pi^1(y)$ и $\pi^1(y)-\pi^1(x)=\nu[x, y]$; если же $\rho_\nu[s, y]\geqslant m/2$, то $t\in P^1(y)$, $s\in P^2(y)$, $\rho_\nu[s, y]=\pi^2(y)$ и $\pi^2(y)-\pi^1(x)=\nu[x, y]$, $P^1(x)\neq P^1(y)$. ■

Следствие 1. Пусть в сети (G_ν, ν) отсутствуют центральные вершины. Тогда (с точностью до перестановки x и y) выполняется одно из двух условий: а) $\pi^1(y)-\pi^1(x)=\nu[x, y]$, множества $P^1(x)$ и $P^1(y)$ — одноэлементы и одинаковы; б) $\pi^2(y)-\pi^1(x)=\nu[x, y]$, множества $P^1(x)$ и $P^1(y)$ — одноэлементы и различны.

Это утверждение непосредственно следует из доказательства леммы 1.

Лемма 2. Пусть $\xi'_{s',t'}=\langle s', z, [z, w], w, t'\rangle\xi'$ и $\xi''_{s'',t''}=\langle s'', z, [z, w], w, t''\rangle\xi''$ — две $P\nu$-геодезические. Тогда цепь $\xi_{s',t''}=\xi'_{s',z}\cdot\xi''_{z,t''}$ — также $P\nu$-геодезическая.

Доказательство. Имеем:

$$2m=\nu(\xi'_{s',t'})+\nu(\xi''_{s'',t''})=\nu(\xi'_{s',z})+\nu(\xi'_{w,t'})+\nu(\xi''_{s'',z})+$$
$$+\nu(\xi''_{z,t''})+2\nu[x, y].$$

Пусть $s'\neq s''$. Тогда $\nu(\xi'_{s',z}\cdot\xi'''_{z,s''})\geqslant m$, и поэтому $\nu(\xi'_{w,t'})+\nu(\xi''_{w,t''})<m$ откуда следует, что $t'=t''$. Таким образом возможны два случая: а) $s'\neq s''$, $t'=t''$; б) $s'=s''$, $t'\neq t''$. Отсюда $s'\neq t''$ и $s''\neq t'$, поэтому $\nu(\xi'_{s',z}\cdot\xi''_{z,t''})\geqslant m$, $\nu(\xi''_{s'',z}\cdot\xi'_{z,t''})\geqslant m$. Но $\nu(\xi'_{s',z}\cdot\xi''_{z,t''})+\nu(\xi''_{s'',z}\cdot\xi'_{z,t''})=$ $=\nu(\xi'_{s',t'})+\nu(\xi''_{s'',t''})=2m$.

Следовательно, $\nu(\xi_{s',t''})=m$. ■

1.2. Нам желательно работать с такими сетями, у которых отсутствуют центральные вершины. Поэтому сеть (G_ν, ν) перестраивается в сеть $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$, сохраняющую все интересующие нас свойства, но уже не имеющую центральных вершин. Опишем эту перестройку. Пусть x — центральная вершина в G_ν и $O(x)$ — множество вершин, с ней смежных. Для каждой вершины $y\in O(x)$ множество $P^1(x)$ — однополюсное и $\bigcup_{y\in O(x)} P^1(y) = P(x)$. Заменим вершину x множеством вершин $\{x_s;\ s\in P(x)\}$. Каждое из ребер вида $[x, y]\in E_\nu$ заменим ребром $[x_s, y]$ (где $\{s\} = P(y)$) имеющим ту же пропускную способность. Вершины x_s, $s\in P(x)$ соединяются попарно ребрами бесконечной пропускной способности; подграф, образованный вершинами x_s и этими ребрами, назовем *центральным подграфом*, или *центром*. Поскольку никакие две центральные вершины в G_ν не смежны, то перестройку каждой такой вершины можно произвести независимо; полученный в результате граф обозначим $\tilde G_\nu = (\tilde V_\nu, \tilde E_\nu)$. Вместо числовой функции ν на ребрах $[x, y]$ графа $\tilde G_\nu$ задается двухкомпонентная векторная функция $\tilde\nu = \tilde\nu[x, y]$ по следующему правилу: а) если ребро $[x, y]$ оставалось без изменений, то $\tilde\nu[x, y] = (\nu[x, y], 0)$; б) если ребро $[x_s, y]$ образовалось из ребра $[x, y]$ (x — центральная вершина), то $\tilde\nu[x_s, y] = (\nu[x, y], -1)$; в) если $[x_{s'}, x_{s''}]$ — ребро центра, то $\tilde\nu[x_{s'}, x_{s''}] = (0, 2)$ (на рис. 1: первые числа на ребрах — пропускные способности, вторые — стоимости). Для векторов $\tilde\nu$ определены обычные (покоординатные

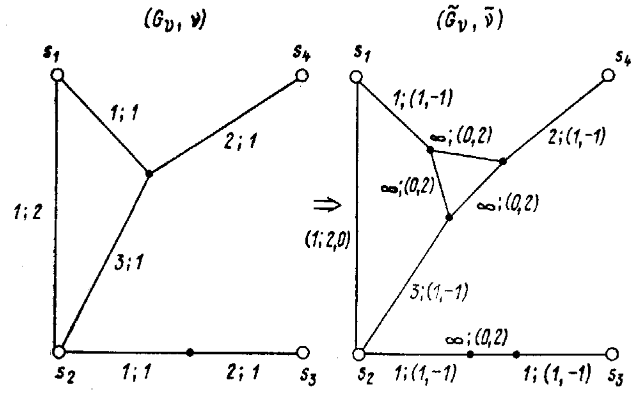

Рис. 1

операции сложения и умножения на число, а также операция (лексикографического слева) сравнения: вектор (α_1, β_1) больше вектора (α_2, β_2), если $\alpha_1 > \alpha_2$, а при $\alpha_1 = \alpha_2$ — если $\beta_1 > \beta_2$.

Первая координата каждого вектора μ считается его главным значением и обозначается $\urcorner\mu\ulcorner$ (так $\urcorner(\alpha, \beta)\ulcorner = \alpha$).

Исходя из этого, определяются вектор-длины цепей $\tilde\nu(\xi)$, вектор-расстояния $\tilde\rho_\nu[x\ y]$, вектор-потенциалы $\tilde\pi^1(x)$ и $\tilde\pi^2(x)$.

Определим естественное отображение $\varkappa: \tilde G_\nu \to G_\nu \subset G$ — *отображение стягивания центров*. Легко убедиться, что: а) в сети $\tilde G_\nu$ минимальное вектор-расстояние между полюсами равно $\tilde m = (m, 0)$; б) в сети $\tilde G_\nu$ нет центральных вершин; в) отображение $\varkappa$ взаимно-однозначно переводит P, $\tilde\nu$-геодезические сети $(\tilde G_\nu, \tilde\nu)$ в P, ν-геодезические сети (G, ν). Можно проверить также, что для сети $(\tilde G_\nu, \tilde\nu)$ справедливо следствие 1 (при замене соответствующих чисел векторами). В дальнейшем добавку «вектор» мы будем опускать.

Скажем, что мультипоток F течет по геодезическим сети (G_ν, ν) (соответственно, $\tilde G_\nu$, $\tilde\nu$), если при любом или, что то же самое, при некотором его разложении на потоковые нити носитель каждой нити является P, ν-геодезической (соответственно, P, $\tilde{\nu}$-геодезической). Соответствие между геодезическими сетей $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$ и (G, ν) естественно переносится на взаимно-однозначное соответствие между мультипотоками, текущими по геодезическим, при этом мощности, а также стоимости мультипотоков (а также любого из составляющих его потоков) одинаковы. Таким образом, мы построили сеть $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$, эквивалентную сети (G, ν) и не содержащую нежелательных центральных вершин.

1.3. Накрывающая сеть. Определим теперь основной объект работы алгоритма — *ориентированную* накрывающую сеть $\Gamma^\nu=(V^\nu, E^\nu)$. Каждая вершина $x\in\tilde{V}_\nu$ порождает две вершины x^1 и x^2 сети Γ^ν, называемые, соответственно, *первой* и *второй копиями* вершины x. Вершине x^1 приписывается потенциал $\pi(x^1)=\tilde{\pi}^1(x)$, а вершине x^2 — потенциал $\pi(x^2)=\tilde{\pi}^2(x)$. Пусть $[x, y]\in\tilde{E}_\nu$, тогда согласно следствию 1 (с точностью до перестановки x и y) либо $\tilde{\pi}^1(y)-\tilde{\pi}^1(x)=\tilde{\nu}[x, y]$, либо $\tilde{\pi}^2(y)-\tilde{\pi}^1(x)=\tilde{\nu}[x, y]$. В первом случае ребро $[x, y]$ порождает две дуги: (x^1, y^1) и (y^2, x^2), во втором — дуги (x^1, y^2) и (y^1, x^2). Каждой дуге (x^i, y^j), образованной из ребра $[x, y]$, приписывается пропускная способность $c(x^i, y^j)=c[x, y]$ и длина $\nu(x^i, y^j)=\tilde{\nu}[x, y]$. Вершины вида s^1, где $s\in P$, считаются *источниками*, а вершины вида s^2 — *стоками* сети Γ^ν (соответствующие множества обозначим S и T). Очевидно $\pi(s^1)=0$, $\pi(s^2)=\tilde{m}$. Поскольку для любой дуги $(x^i, y^j)\in E^\nu$ выполняется $\pi(y^j)-\pi(x^i)=\nu(x^i, y^j)>0$, то граф Γ^ν не содержит ориентированных циклов. Заметим, что центральному подграфу графа G_ν, образованному из центральной вершины $x\in V_\nu$, в сети Γ^ν будет соответствовать подграф $H(x)$ с множеством вершин $\{x^i_s,\ s\in P(x),\ i=1, 2\}$ и множеством дуг $\{(x^1_{s'}, x^2_{s''});\ s', s''\in P(x),\ s'\neq s''\}$. Этот подграф также будем называть центром.

Введем следующие два отображения: 1) $\psi:\Gamma^\nu\to\tilde{G}_\nu$, при котором $\psi(x^i)=x$, $\psi(x^i, y^j)=[x, y]$ и 2) $\chi:\Gamma^\nu\to\Gamma^\nu$, при котором $\chi(x^i)=x^{3-i}$, $\chi(x^i, y^j)=(y^{3-j}, x^{3-i})$ (т. е. одна копия вершины или дуги переводится в другую). Отображение χ суть *косая симметрия* графа Γ^ν: дуги переходят в свои копии со сменой ориентации. В дальнейшем подграф $\chi(H)$ будем называть *симметричным* относительно $H\subseteq\Gamma^\nu$.

Мы будем говорить, что множество $X\subset V^\nu$ *достижимо* из множества $Y\subset V^\nu$, если существует ориентированный путь из какой-либо вершины $x\in X$ в какую-либо вершину $y\in Y$. Ориентированный путь из источника $(s^1\in S)$ в сток $(t^2\in T)$ будем называть S, *T-путем*, а множество всех таких путей будем обозначать $\mathcal{L}(\Gamma^\nu)$.

Лемма 3. При отображении ψ любой S, I-путь сети Γ^ν переводится в P, $\tilde{\nu}$-геодезическую сети $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$, причем множество $\mathcal{L}(\Gamma^\nu)$ отображается *на все* множество $\mathcal{T}(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$. Прообраз каждой P, ν-геодезической состоит ровно из двух S, I-путей.

Доказательство. Пусть $\xi_{s,t}=(s=x_0, x_1, \ldots, x_k=t)-P$, $\tilde{\nu}$-геодезическая. Поскольку в $\tilde{G}_\nu$ нет центральных вершин, то найдется такой номер j, что $P^1(x_j)=\{s\}$, а $P^1(x_{j+1})=\{t\}$. Тогда для ребер $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \ldots, j-1$, а также для ребер $[x_i, x_{i+1}]$, $i=j+1, \ldots$ $\ldots, k-1$, имеет место характеризация первого вида (для первых — $\tilde{\pi}^1(x_{i+1})-\tilde{\pi}^1(x_i)=\tilde{\nu}[x_i, x_{i+1}]$, для вторых — $\tilde{\pi}^1(x_i)-\tilde{\pi}^1(x_{i+1})=\tilde{\nu}[x_i, x_{i+1}]$

или $\tilde{\pi}^2(x_{i+1})-\tilde{\pi}^2(x_i)=\tilde{\nu}[x_i, x_{i+1}]$, а для ребра $[x_j, x_{j+1}]$ — характеризация второго вида: $\tilde{\pi}^2(x_{j+1})-\tilde{\pi}^1(x_j)=\tilde{\nu}[x_j, x_{j+1}]$. Следовательно, в сети Γ^ν имеется (ориентированный) путь $\xi_{(s^1,t^2)}=(s^1, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_j^1, x_{j+1}^2, x_{j+2}^2, \ldots, x_k^2, t^2)$, а также симметричный ему путь

$$\xi''_{(t^1,s^2)}=\chi(\xi'_{(s^1,t^2)})=(t^1, x_k^1, x_{k-1}^1, \ldots, x_{j+1}^1, x_j^2, x_{j-1}^2, \ldots, x_1^2, s^2).$$

Мы доказали, что прообразами $P, \tilde{\nu}$-геодезических служат пары симметричных S, T-путей. Докажем теперь, что любой S, T-путь переходит в $P, \tilde{\nu}$-геодезическую. Поскольку в сети Γ^ν нет дуг вида (z^2, w^1), то S, T-путь имеет вид

$$\xi_{(s^1,t^2)}=(s^1=x_0^1, x_1^1, \ldots, x_j^1, x_{j+1}^2, x_{j+2}^2, \ldots, x_{k-1}^2, x_k^2=t^2).$$

Так как $\nu(\xi_{(s^1,t^2)})=\sum_{i=0}^{k-1}\nu(x_i^{l_i}, x_{i+1}^{l_{i+1}})=\sum_{i=0}^{k-1}(\pi(x_{i+1}^{l_{i+1}})-\pi(x_i^{l_i}))=\tilde{m}$, то $\nu(\psi(\xi_{(s^1,t^2)}))=\tilde{m}$, т. е. $\psi(\xi_{(s^1,t^2)})$ — цепь длины $\tilde{m}$. Осталось доказать, что $s\neq t$. Поскольку $\pi(x_j^1)<\tilde{m}/2$, то, учитывая следствие 1 и способ построения сети Γ^ν, имеем $P^1(x_i)=\{s\}$ при $i=0, 1, \ldots, j$ и $P^1(x_i)=\{t\}$ при $i=j+1, \ldots, k$. Но по тому же следствию $\{s\}=P^1(x_j)\neq P^2(x_{j+1})=\{t\}$. ■

Лемма 3 проясняет смысл преобразования сети G_ν в сеть $\tilde{G}_\nu$, не имеющую центральных вершин. Избавление от таких вершин позволяет построить накрывающую сеть, в которой ориентированные пути из источников в стоки соответствуют $P, \tilde{\nu}$-геодезическим сети $\tilde{G}_\nu$ (это соответствие будет взаимно-однозначным, если каждую геодезическую рассматривать вместе с одной из двух возможных ориентаций).

Следствие 2. а) $\varkappa\circ\psi(\mathscr{L}(\Gamma^\nu))=\mathscr{T}(G, \nu)$; б) прообраз $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(\xi_{st})$ P, ν-геодезической $\xi_{s,t}$ сети (G, ν) состоит из двух путей $\xi'_{(s^1,t^2)}$ и $\xi''_{(t^1,s^2)}$.

1.4. Пусть F — мультипоток в сети $(\tilde{G}_\nu, \tilde{\nu})$, текущий по геодезическим и $\{\varphi_\alpha, \alpha\in I\}$ — некоторое его разложение на нити. Пусть носитель нити φ_α соединяет полюса s и t: $\xi(\varphi_\alpha)=\xi_{s,t}$. Следуя отображению ψ, поставим в соответствие нити φ_α пару (ориентированных) нитей φ'_α и φ''_α сети Γ^ν: $\xi(\varphi'_\alpha)=\xi'_{(s^1,t^2)}$ и $\xi(\varphi''_\alpha)=\xi''_{(t^1,s^2)}$, $\psi(\xi'_{(s^1,t^2)})=\psi(\xi''_{(t^1,s^2)})=\xi_{s,t}$, $\|\varphi'_\alpha\|=\|\varphi''_\alpha\|=\|\varphi\|$. Будем обозначать $\psi(\varphi'_\alpha)=\psi(\varphi''_\alpha)=\varphi_\alpha$. В сети Γ^ν определим функцию f^F, полагая $f^F(x^i, y^j)=\Sigma_{\alpha\in I}(\varphi'_\alpha(x^i, y^j)+\varphi''_\alpha(x^i, y^j))$.

Лемма 4. 1) f^F — допустимый многополюсный поток в сети Γ^ν с множеством источников S и стоков T; 2) $f^F(x^i, y^j)=f^F(y^{3-j}, x^{3-i})$; 3) мощность $\|f^F\|\equiv\Sigma_{s'\in S}\operatorname{div}_{f^F}(s^1)$ потока f^F равна $2\|F\|$.

Доказательство леммы очевидно.

Назовем функцию $g=g(x^i, y^j)$ *симметричной*, если $g(x^i, y^j)=g(y^{3-j}, x^{3-i})$, $(x^i, y^j)\in E^\nu$. Пусть f — симметричный поток в сети Γ^ν и $\{\varphi_\alpha, \alpha\in I\}$ — некоторое симметричное разложение его на потоковые нити *, т. е. такое разложение, в котором вместе с каждой нитью φ

* Такое разложение можно строить и как обычное разложение потока в сети с дополнительным правилом: «отслоив» некоторую нить, надо «отслоить» и симметричную ей.

присутствует симметричная ей нить $\varphi'=\chi(\varphi)$: $\xi(\varphi')=\chi(\xi(\varphi))$, $\|\varphi\|=\|\varphi'\|$. Потоку f с фиксированным симметричным разложением сопоставим мультипоток $F^f_{\{\varphi\}}$ в сети $\tilde{G}_\nu$, «составленный» из нитей $\psi(\varphi_\alpha)$, $\alpha\in I$.

Лемма 5. 1) $F^f_{\{\varphi\}}$ — допустимый мультипоток в сети $\tilde{G}_\nu$, текущий по геодезическим; 2) мощность $\|F^f_{\{\varphi\}}\|$ мультипотока $F^f_{\{\varphi\}}$ равна $1/2\cdot\|f\|$; 3) поток $f^{F^f_{\{\varphi\}}}$ совпадает с f; 4) если f — (полу-)целочисленный симметричный поток в сети Γ^ν, то существует симметричное (полу-)целочисленное разложение его на нити $\{\varphi_\alpha, \alpha\in I\}$ и мультипоток $F^f_{\{\varphi\}}$ — (полу-)целочисленный.

Доказательство леммы очевидно.

Ввиду того, что у симметричного потока f существуют, вообще говоря, различные симметричные разложения $\{\{\varphi_\alpha\}\}$, то ему соответствует семейство мультипотоков $\{F^f_{\{\varphi_\alpha\}}\}$. С точки зрения нашей задачи все эти мультипотоки равноправны и мы можем выбирать из них любой.

§ 2. Описание алгоритма решения задачи $<a, K_p|c>$

2.1. Алгоритм $\mathfrak{A}<K_p, \mathrm{Cost}>$ решения задач $<a, K_p|c>$ состоит из последовательности однотипных итераций. Алгоритм будет описан для случая строго положительной функции $a=a[x, y]$, $[x, y]\in E$. В конце статьи указаны необходимые преобразования задачи, которые дают возможность обобщить алгоритм на произвольные сети.

Пусть $i-1$ итераций уже проведено. К началу i-й итерации оказываются построенными следующие объекты:

1°. Функция $\gamma=\gamma[x, y]\geqslant 0$, $[x, y]\in E$.

2°. Сети G_ν, $\tilde{G}_\nu$ и Γ^ν, где $\nu=a+\gamma$.

3°. Поток f в сети Γ^ν (*не обязательно* симметричный). Этот поток имеет множество источников S и стоков T.

Функция γ и поток f подчиняются следующим условиям (соотношения дополняющей нежесткости для двойственных объектов γ и f, заданные в комбинаторном виде):

A. Если $\gamma[x, y]>0$, то $[x, y]\in E_\nu$.

B. Если $\urcorner\gamma(x^i, y^j)\ulcorner>0$ (где $(x^i, y^j)\in E^\nu$), то $f(x^i, y^j)=c(x^i, y^j)$ (здесь $\gamma(x^i, y^j)\equiv\nu(x^i, y^j)-(a, 0)$).

Перед началом 1-й итерации полагаем $\gamma\equiv 0$ и $f\equiv 0$; условия A и B, очевидно, выполняются.

От итерации к итерации величина m, равная минимальному расстоянию $\rho_\nu[s, t]$, $s, t\in P$, определяемому текущей функцией $\nu=a+\gamma$, будет увеличиваться. Как только она станет равной M, задача будет решена (выполнение условий A и B для функции γ и потока $\bar{f}=1/2(f+\chi(f))$ повлечет за собой выполнение соотношений (2) и (3) для функции γ и мультипотока $F^{\bar{f}}$).

Выделим в сети Γ^ν подсеть $\Gamma^\nu_0=(V^\nu, E^\nu_0)$, состоящую из всех вершин V^ν и *допустимых дуг* $(x^i, y^j\in E^\nu)$, таких, для которых $\urcorner\gamma(x^i, y^j)\ulcorner=0$. Из определения сети Γ^ν_0 и условия B следует

Утверждение 1. а) Сети Γ^ν_0 и $\Gamma^\nu\setminus\Gamma^\nu_0=(V^\nu, E^\nu\setminus E^\nu_0)$ — симметричные; б) Каждая дуга сети $\Gamma \setminus \Gamma_0^\nu$ насыщена потоком f; в) Любой центр $H(x)$ сети Γ^ν целиком принадлежит подсети Γ_0^ν.

Перейдем к описанию i-й итерации. Итерация состоит из двух частей: 1) перестройка потока f в f' в сети Γ^ν; 2) переход к новой функции γ' и построение сетей $G_{\nu'}$, $\bar{G}_{\nu'}$ и $\Gamma^{\nu'}$, где $\nu' = a + \gamma'$.

2.2. Перестройка потока f. Условия A и B выполняются на протяжении всего алгоритма, поэтому поток f перестраивается только на подсети Γ_0^ν. Если $H = (V(H), E(H))$ — подграф графа Γ^ν и $h = h(x^i, y^j)$ — некоторая функция, область определения которой включает $E(H)$, то введем величину

$$\operatorname{div}_{h,H}(x^i) \equiv \Sigma_{(x^i, y^j) \in E(H)} h(x^i, y^j) - \Sigma_{(y^j, x^i) \in E(H)} h(y^j, x^i).$$

Функцию $g = g(x^i, y^j)$, $(x^i, y^j) \in E_0^\nu$ назовем *потокоподобной* функции $f|_{E_0^\nu}$, если для любой вершины $x^i \in V^\nu \setminus \{S \cap T\}$ выполняется равенство: $\operatorname{div}_{g,\Gamma_0^\nu}(x^i) = \operatorname{div}_{f,\Gamma_0^\nu}(x^i)$. Величину $\|g\|_{\Gamma_0^\nu}$, равную $\Sigma_{s^1 \in S} \operatorname{div}_{g,\Gamma_0^\nu}(s^1)$, назовем *мощностью* функции g на подсети Γ_0^ν. Очевидна следующая лемма.

Лемма 6. Пусть функция $g(x^i, y^j)$, $(x^i, y^j) \in E_0^\nu$ потокоподобна функции $f|_{\Gamma_0^\nu}$. Тогда: а) функция f', равная f на подсети $\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu$ и g на подсети Γ_0^ν (т. е. $f' = f|_{\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu} \cup g$), является потоком в сети Γ^ν; б) $\|f'\| = \|f\|_{\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu} + \|g\|_{\Gamma_0^\nu}$.

Первая часть итерации состоит в нахождении в сети Γ_0^ν функции g, потокоподобной $f|_{\Gamma_0^\nu}$ и имеющей максимальную мощность. Для этого применим стандартный прием перехода к «беспотоковой» сети [1, с. 14]. А именно, пусть $\Gamma_{0,f}^\nu = (V^\nu, E_{0,f}^\nu)$ — сеть с множеством вершин V^ν и множеством дуг $E_{0,f}^\nu$, определенным следующим образом: если (x^i, y^j) — дуга в Γ_0^ν, то в $E_{0,f}^\nu$ имеется пара дуг — дуга (x^i, y^j) с пропускной способностью $c_f(x^i, y^j) = c(x^i, y^j) - f(x^i, y^j)$ и дуга (y^j, x^i) с пропускной способностью $c_f(y^j, x^i) = f(x^i, y^j)$. Пусть $h(u)$, $u \in E_{0,f}^\nu$ — некоторый поток в сети $\Gamma_{0,f}^\nu$; определим функцию $f \oplus h$ на множестве E_0^ν: $(f \oplus h)(x^i, y^j) = f(x^i, y^j) + h(x^i, y^j) - h(y^j, x^i)$. Аналогично доказываемому в [1, с. 14] имеем:

4°. Функция $f \oplus h$ допустима и потокоподобна $f|_{\Gamma_0^\nu}$.

5°. $\|f \oplus h\| = \|f\|_{\Gamma_0^\nu} + \|h\|$.

6*. Поток h максимален тогда и только тогда, когда в сети Γ_0^ν с функцией $f \oplus h$ отсутствуют активные пути из S в T*.

Итак, на первой части итерации: 1) выделяется подсеть Γ_0^ν и строится сеть $\Gamma_{0,f}^\nu$; 2) в сети $\Gamma_{0,f}^\nu$ находится максимальный поток h; 3) определяются функция $g = f \oplus h$ в сети Γ_0^ν и функция $f' = f|_{\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu} \cup g$ в сети Γ^ν. На основании леммы 6 и утверждений 4°, 5* функция f' —

*Простая ориентированная цепь $L(s, x) = (s = x_0^{i_0}, x_1^{i_1}, \ldots, x_k^{i_k} = x)$, где $x_j^{i_j} \in V^\nu$, $j \in \overline{0, k}$ и $s \in S$, называется *активным* путем в сети Γ^ν с функцией $\tilde{f}$, определенной на E_0^ν, если $c(x_j^{i_j}, x_{j-1}^{i_{j-1}}) - \tilde{f}(x_j^{i_j}, x_{j-1}^{i_{j-1}}) + \tilde{f}(x_{j-1}^{i_{j-1}}, x_j^{i_j}) > 0$, $\forall j \in \overline{1, k}$ (в случае, если $(y^\alpha, z^\beta) \notin E_0^\nu$, в этом неравенстве полагается $c(y^\alpha, z^\beta) = \tilde{f}(y^\alpha, z^\beta) = 0$).

(допустимый) поток и его мощность $\| f' \|$ равна

$$\| f \|_{\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu} + \| g \|_{\Gamma_0^\nu} = \| f \|_{\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu} + \| f \|_{\Gamma_0^\nu} + \| h \| = \| f \| + \| h \|.$$

В результате нахождения максимального потока h в сети Γ_0^ν выявится разрез $R=(X, Y)$, где $X=\{x\}$ — множество вершин в Γ_0^ν, достижимых активными путями $L(s, x)$ из множества $S \ni s$, и $Y = V^\nu \setminus X$. Для любой *прямой* дуги разреза $(x^i, y^j) \in E_0^\nu$ (т. е. такой, что $x^i \in X$, $y^j \in Y$) выполняется: $g(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$, а для любой *обратной* дуги $(x^i, y^j) \in E_0^\nu$ $(x^i \in Y, y^j \in X)$ — $g(x^i, y^j) = 0$. Построим разрез $\chi(R) = (\chi(Y), \chi(X))$, симметричный $R=(X, Y)$

Лемма 7. а) Если (x^i, y^j) — прямая дуга разреза $\chi(R)$, то $g(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$, а если обратная, то $g(x^i, y^j) = 0$; б) $X \cap \chi(X) = \varnothing$.

Доказательство. Для произвольного подграфа $H = (V(H), E(H))$ графа Γ^ν, произвольного разреза $R = (Z, \bar{Z})$, $Z \subset V^\nu$, $\bar{Z} = V^\nu \setminus Z$ и произвольной функции $\hat{f}(x^i, y^j)$, $(x^i, y^j) \in \hat{E} \supseteq E(H)$ положим:

1) $c_H(R) = \Sigma_{(x^i, y^j) \in E(H), x^i \in Z, y^j \in \bar{Z}}\, c(x^i, y^j)$;

2) $\mathrm{div}_{\hat{f}, H}(R) = \Sigma_{(x^i, y^j) \in E(H), x^i \in Z, y^j \in \bar{Z}}\, \hat{f}(x^i, y^j) -$
$- \Sigma_{(x^i, y^j) \in E(H), x^i \in \bar{Z}, y^j \in Z}\, \hat{f}(x^i, y^j)$.

Поскольку сеть Γ_0^ν — симметричная, то (x^i, y^j) — прямая (обратная) дуга разреза R тогда и только тогда, когда (y^{3-j}, x^{3-i}) — прямая (обратная) дуга разреза $\chi(R)$, откуда

$$c_{\Gamma_0^\nu}(R) = c_{\Gamma_0^\nu}(\chi(R)). \tag{4}$$

Из теории одного потока следует [1, с. 13], что $\| f \| = \mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu}(R) = \mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu}(\chi(R))$. Поскольку $\mathrm{div}_{f, \Gamma_\nu}(R) = \mathrm{div}_{f, \Gamma_0^\nu}(R) + \mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu}(R)$, $\mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu}(\chi(R)) = \mathrm{div}_{f, \Gamma_0^\nu}(\chi(R)) + \mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu}(\chi(R))$ и функция f насыщает все дуги сети $\Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu$ (откуда $\mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu}(R) = \mathrm{div}_{f, \Gamma^\nu \setminus \Gamma_0^\nu}(\chi(R))$, получаем:

$$\mathrm{div}_{f, \Gamma_0^\nu}(R) = \mathrm{div}_{f, \Gamma_0^\nu}(\chi(R)). \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что $\mathrm{div}_{g, \Gamma_0^\nu}(\chi(R)) = \mathrm{div}_{f, \Gamma_0^\nu}(\chi(R)) + \mathrm{div}_{h, \Gamma_{0,f}^\nu}(\chi(R)) = \mathrm{div}_{f, \Gamma_0^\nu}(R) + \mathrm{div}_{h, \Gamma_{0,f}^\nu}(R) = \mathrm{div}_{g, \Gamma_0^\nu}(R)$, т. е.

$$\mathrm{div}_{g, \Gamma_0^\nu}(R) = \mathrm{div}_{g, \Gamma_0^\nu}(\chi(R)). \tag{6}$$

Как отмечалось выше, в сети Γ_0^ν прямые дуги разреза R «насыщены функцией» g, а в обратных она равна 0, следовательно, $c_{\Gamma_0^\nu}(R) = \| g \| = \mathrm{div}_{g, \Gamma_0^\nu}(R)$, откуда ввиду (4) и (6) получаем

$$\mathrm{div}_{g, \Gamma_0^\nu}(\chi(R)) = c_{\Gamma_0^\nu}(\chi(R)),$$

что может быть только в случае $g(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$ для прямых дуг (x^i, y^j) разреза $\chi(R)$ и $g(x^i, y^j) = 0$ — для обратных. Утверждение „а" леммы доказано. Докажем утверждение „б". Пусть $X \cap \chi(X) \neq \varnothing$, откуда $Z \equiv X \cap \chi(Y) \subset X$ (вложение строгое). Из доказанного следует: любая прямая дуга разреза $(Z, \bar{Z})$, где $\bar{Z} = V^\nu \setminus Z$, в сети Γ_0^ν насыщена функ цией g, а на любой обратной — функция равна 0. Это противоречит тому, что все множество X достижимо из S активными путями. ■

На основании леммы 7 множество V^ν можно разбить на 3 непересекающихся подмножества: X, $\chi(X)$ и $W \equiv V^\nu \setminus \{X \cup \chi(X)\}$. Очевидно, что если $x^i \in W$, то $\chi(x^i) = x^{3-i} \in W$.

Введем следующую классификацию дуг сети Γ^ν. Дугу $(x^i, y^j) \in E^\nu$ будем называть AB-*дугой*, где A и B — элементы множества символов $\{S, T, W\}$ и выбираются по следующему правилу: $A = S$, если $x^i \in X$; $A = T$, если $x^i \in \chi(X)$; $A = W$, если $x^i \in W$; аналогично для B, определяемому по y^j. Так, например, если $x^i \in \chi(X)$, $y^j \in \chi(X)$, то (x^i, y^j) считается TT-дугой, а если $x^i \in W$, $y^j \in X$, то WS-дугой.

Исследуем расположение подграфов-центров относительно разрезов R и $\chi(R)$. Центр $H(x) = (V(x), E(x)) \subset \Gamma^\nu$ назовем *нерассекаемым*, если $V(x) \subseteq W$ и *рассекаемым* — в противном случае. Пусть центр $H(x)$ рассекаемый и пусть $X(x^1) \subseteq V(x)$ (аналогично $X(x^2) \subseteq V(x)$) — множество вершин вида x_s^1, $s \in P(x)$, (соответственно x_s^2) принадлежащих X.

Случай А. Множество $X(x^1)$ пусто. Тогда $X \cap V(x) = X(x^2)$ (рис. 2). Из построения центра следует, что любая дуга сети Γ^ν, входя-

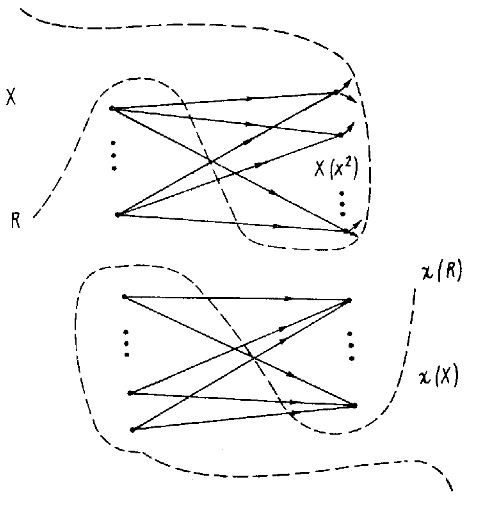

Рис. 2

щая в вершину вида x_s^2, может быть только дугой самого центра, и поэтому все такие дуги принадлежат Γ_0^ν и поток f' на них — суть g. Для любого $x_s^2 \in X(x^2)$ из того, что $x_{s'}^1 \notin X$, $\forall s^1 \in P(x)$, следует $f^1(x_{s'}^1, x_s^2) = g(x_{s'}^1, x_s^2) = 0$, $\forall s' \in P(x)$, а это означает, что и на дугах, исходящих из вершин $x_s^2 \in X(x^2)$, поток f' равен нулю. Но тогда вершины $x_s^2 \in X(x^2)$ не могут быть достижимы из S активными путями в сети Γ_0^ν. Случай A невозможен.

Случай В. $X(x^1) \neq \varnothing$. Пусть $x_s^1 \in X(x^1)$. Поскольку для любого $x_{s'}^2$, $s' \in P(x) \setminus \{s\}$ имеется дуга $(x_s^1, x_{s''}^2) \in E(x)$ и $c(x_s^1, x_{s'}^2) = \infty$, то $x_{s'}^2 \in X(x^2)$, $\forall s' \in P(x) \setminus \{s\}$. Но из того, что $\chi(x_s^1) \in \chi(X)$ и $\chi(x_{s'}^2) \in \chi(X)$, $\forall s' \in P(x) \setminus \{s\}$, следует, что $X(x^1) = \{x_s^1\}$ и $X(x^2) = \{x_{s'}^2, x' \in P(x) \setminus \{s\}\}$.

(рис. 3). Отсюда, в частности, следует, что $f'(x^1_{s'}, x^2_{s''}) = g(x^1_{s'}, x^2_{s''}) = 0$ при $s' \neq s$, $s'' \neq s$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 8. Пусть $H(x) = (V(x), E(x))$ — рассекаемый центр

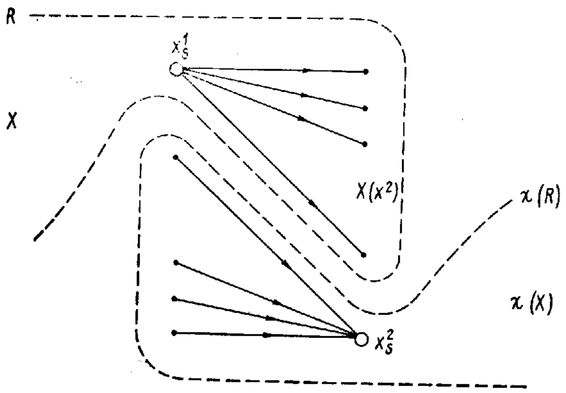

Рис. 3

и $X(x^1) \equiv \{x^1_s \in V(x) \mid x^1_s \in X\}$, $X(x^2) \equiv \{x^2_s \in V(x) \mid x^2_s \in X\}$. Тогда: а) множество $X(x^1)$ состоит из единственной вершины x^2_s, а множество $X(x^2_s)$ равно $\{x^2_s;\ s \in P(x) \setminus \{s\}\}$; б) поток f' отличен от нуля только быть может на дугах вида (x^1_s, x^2_s) и (x^1_s, x^2_s), $s \in P(x) \setminus \{s\}$. ■

2.3. Вторая часть итерации. Пусть $\hat{\Gamma}^\nu = (\hat{V}^\nu, \hat{E}^\nu)$ — сеть, состоящая из S, T и из всех тех вершин и дуг сети Γ^ν, которые лежат на S, T-путях сети Γ^ν, не содержащих WS-, TW- и TS-дуг сети Γ^ν_0. Сеть $\hat{\Gamma}^\nu$ можно получить из Γ^ν при помощи следующих двух процедур.

1) Удаление из сети Γ^ν всех WS-, TW- и TS-дуг сети Γ^ν_0. Заметим, что для таких дуг (x^i, y^j) выполняется

$f'(x^i, y^j) = 0, \quad \urcorner\gamma(x^i, y^j)\Gamma = 0.$

2) Удаление из полученной сети всех вершин и дуг, не принадлежащих ST-путям. Поскольку граф Γ^ν — ациклический, то эта процедура заключается в последовательном удалении тупиковых и антитупиковых вершин (из $V^\nu \setminus \{S \cup T\}$) и инцидентных им дуг. Полученная сеть и будет $\hat{\Gamma}^\nu$. Пусть для дуги $(x^i, y^j) \in E^\nu$ $f'(x^i, y^j) > 0$. Тогда дуга (x^i, y^j) принадлежит некоторой потоковой нити из S в T и, следовательно, $(x^i, y^j) \in \hat{E}^\nu$. Таким образом, поток f' целиком сосредоточен в подсети $\hat{\Gamma}^\nu$. Из определения сетей Γ^ν_0 и $\hat{\Gamma}^\nu$ следует также, что для любой WS-, TW- или TS-дуги $(x^i, y^j) \in \hat{E}^\nu$ выполняется $f'(x^i, y^j) = c(x^i, y^j)$, $\urcorner\gamma(x^i, y^j)\Gamma > 0$.

Лемма 9. 1) $X \subset \hat{V}^\nu$; 2) на подмножестве вершин X $(\chi(X))$ сети Γ^ν и $\hat{\Gamma}^\nu$ совпадают (т. е. $\langle X \rangle_{\Gamma^\nu} = \langle X \rangle^*_{\hat{\Gamma}^\nu}$).

Доказательство. Фактически требуется доказать, что для любой дуги $(x^i, y^j) \in E^\nu$, такой, что x^i, $y^j \in X$, существует ST-путь, ее содержащий, не имеющий WS-, TW- и TS-дуг с нулевым потоком f'. Покажем сначала, что для любой вершины $x^i \in X$ есть (ориентированный) путь такого рода, начинающийся в S и оканчивающийся в x^i. Поскольку $x^i \in X$, то в Γ^ν_0 существует активный путь $\xi_{(s^1, x^i)}$, $s^1 \in S$.

* $\langle Y \rangle_H$ означает подграф графа H, порожденный подмножеством его вершин Y.

Пусть (z^l, w^k) — последняя обратная дуга в $\xi_{(s^1, x^i)}$. Поскольку $f'(z^l, w^k)>0$, то существует потоковая нить, проходящая через z^l. Искомый путь получается составлением носителя этой нити от S до z^l и участка пути $\xi_{(s^1, x^i)}$ от z^l до x^i. Докажем теперь, что для любой вершины $y^j \in X$ существует путь, не содержащий WS-, TW- и TS-дуг с нулевым потоком, идущий из y^j в T. Выберем некоторый путь $\xi_{(y^j, t^2)}$, $t^2 \in T$, в сети Γ^ν и пусть z^l — последняя вершина в нем, принадлежащая X и (z^l, w^k) — очередная дуга. Тогда (z^l, w^k) — это SW- или ST-дуга, поэтому $f'(z^l, w^k)=c(z^l, w^k)>0$ и искомый путь получается путем составления участка пути $\xi_{(y^j, t^2)}$ от y^j до w^k и носителя некоторой потоковой нити от w^k до T. ■

Пусть дуга $(x^i, y^j) \in \hat{E}^\nu$ не является дугой центра, тогда $[x, y] = \varkappa \circ \psi(x^i, y^j)$ — ребро в G. Ребро $[x, y]$ назовем: а) R^+-ребром (R^{++}-ребром), если (x^i, y^j) — SW- или WT-дуга (соответственно, ST-дуга) и б) R^--ребром (R^{--}-ребром), если (x^i, y^j) — WS- или TW-дуга (соответственно, TS-дуга). Легко проверить, что определение корректно, т. е. что дуги (x^i, y^j) и (y^{3-j}, x^{3-i}) одинаково классифицируют ребро $[x, y]$.

Из сказанного выше следует, что для R^-- и R^{--}-ребер $[x, y]$ $\gamma[x, y]>0$.

Пусть $\varepsilon_1=\min\{\gamma[x', x'']; \frac{1}{2}\gamma[y', y'']\}$, где минимум берется по всем R^--ребрам $[x', x'']$ и всем R^{--}-ребрам $[y', y'']$. Если R^-- и R^{--}-ребер нет, то положим $\varepsilon_1=\infty$. Пусть ε — неотрицательное число, такое, что $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Определим функцию

$$\gamma_\varepsilon=\gamma_\varepsilon[x, y]=\begin{cases} \gamma[x, y]+\varepsilon, & \text{если } [x, y] - R^+\text{-ребро};\\ \gamma[x, y]-\varepsilon, & \text{если } [x, y] - R^-\text{-ребро};\\ \gamma[x, y]+2\varepsilon, & \text{если } [x, y] - R^{++}\text{-ребро};\\ \gamma[x, y]-2\varepsilon, & \text{если } [x, y] - R^{--}\text{-ребро};\\ \gamma[x, y] & \text{— в остальных случаях.}\end{cases} \quad [x, y] \in E$$

Из определения величины ε_1 следует, что функция γ_ε неотрицательная. Будем обозначать ν_ε функцию $a+\gamma_\varepsilon$.

Рассмотрим множество $\mathcal{L}(\hat{\Gamma}^\nu)$ ST-путей сети $\hat{\Gamma}^\nu$. Обозначим $\hat{\mathcal{T}}(G, \nu)$ образ множества $\mathcal{L}(\hat{\Gamma}^\nu)$ при отображении $\varkappa \circ \psi$; это множество состоит, вообще говоря, из части P, ν-геодезических сети (G, ν) (см. следствие 2).

Лемма 10. Существует такое $\bar{\varepsilon}: 0<\bar{\varepsilon}\leqslant\varepsilon_1$ (быть может равное ∞), что при любом $\varepsilon: 0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, $\mathcal{T}(G, \nu_\varepsilon)$ совпадает с $\hat{\mathcal{T}}(G, \nu)$.

Доказательство. Поскольку всех простых цепей в G — конечное число, длина каждой цепи на отрезке $[0, \varepsilon_1]$ — непрерывная функция, и при $\varepsilon=0$ множество P, ν-геодезических есть $\mathcal{T}(G, \nu)$, то существует $\varepsilon_2: 0<\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1$ (быть может $\varepsilon_2=\infty$), такое, что при $\varepsilon: 0<\varepsilon<\varepsilon_2$ в сети (G, ν_ε) не будет P, ν_ε-геодезических, отличных от геодезических из $\mathcal{T}(G, \nu)$ (если $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, то ε_2 определяет «момент» появления новой геодезической), таким образом $\mathcal{T}(G, \nu_\varepsilon)\subseteq\mathcal{T}(G, \nu)$.

Определим вектор-потенциалы $\pi_\varepsilon(x^i)$, $x^i \in V^\nu$, равные: $\pi(x^i)$, при $x^i \in X$; $\pi(x^i)+\varepsilon$, при $x^i \in W$; $\pi(x^i)+2\varepsilon$, при $x^i \in \chi(X)$. Из определения функций γ_ε и ν_ε следует, что для любой дуги $(x^i, y^j) \in E^\nu$, не являющейся WS-, TW- или TS-дугой сети Γ_0^ν, следует (при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$)

$$\nu_\varepsilon[x, y]=\urcorner\pi_\varepsilon(y^j)-\pi_\varepsilon(x^i)\ulcorner, \tag{7}$$

а для являющейся таковой

$$\nu_\varepsilon[x, y] = \nu[x, y] = \urcorner\pi(y^j) - \pi(x^i)\ulcorner = \urcorner\pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i)\ulcorner + \begin{Bmatrix}\varepsilon \\ 2\varepsilon\end{Bmatrix}$$

или

$$\nu_\varepsilon[x, y] > \urcorner\pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i)\ulcorner \tag{8}$$

(для дуг центров $(x^1_{s'}, x^2_{s''})$ мы полагаем $\nu_\varepsilon[x, x] = 0$). Рассмотрим произвольный ST-путь $\xi_{(s^1, t^2)}$ в Γ^ν, и пусть $\tilde{\xi}_{s,t} = \varkappa\circ\psi(\xi_{(s^1,t^2)})$. Тогда на основании (7) и (8)

$$\nu_\varepsilon(\tilde{\xi}_{s,t}) \geqslant \Sigma_{(x^i, y^j)\in\xi_{(s^1,t^2)}} \urcorner\pi_\varepsilon(y^j) - \pi_\varepsilon(x^i)\ulcorner =$$
$$= \urcorner\pi_\varepsilon(t^2) - \pi_\varepsilon(s^1)\ulcorner = m + 2\varepsilon. \tag{9}$$

Если теперь путь $\xi_{(s^1,t^2)}$ целиком лежит в $\check{\Gamma}^\nu$, то (9) обращается в равенство $\nu_\varepsilon(\tilde{\xi}_{s,t}) = m + 2\varepsilon$, если же $\xi_{(s^1,t^2)}$ не принадлежит $\hat{\Gamma}^\nu$, то в нем найдется дуга (x^i, y^j), для которой справедливо (8), откуда $\nu_\varepsilon(\tilde{\xi}_{s,t}) > m + 2\varepsilon$. Итак мы показали, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ цепи сети (G, ν_ε), совпадающие с элементами из $\hat{\mathcal{T}}(G, \nu)$, имеют длину $m + 2\varepsilon$, а цепи, совпадающие с элементами из $\mathcal{T}(G, \nu)\setminus\hat{\mathcal{T}}(G, \nu)$, имеют длину, большую $m + 2\varepsilon$. Следовательно, $\mathcal{T}(G, \nu_\varepsilon)$ совпадает с $\hat{\mathcal{T}}(G, \nu)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2 = \bar{\varepsilon}$. ■

2.4. Конструктивное определение $\bar{\varepsilon}$ и проведение второй ч сти итерации. Величина ε_1 равная $\min\{\gamma[x', x'']; 1/2\gamma[y', y'']; \infty\}$, где $[x', x'']$ — R^--ребро, а $[y', y'']$ — R^{--}-ребро, вычисляется непосредственно. Опишем алгоритм нахождения ε_2.

Обозначим $\hat{G}(\hat{V}, \hat{E})$ подграф графа G, состоящий из множества вершин $\hat{V} \equiv \varkappa\circ\psi(\hat{V}^\nu)$ и множества ребер $\hat{E} = \varkappa\circ\psi(\hat{E}^\nu)$. Заметим, что для каждого ребра $[x, y]$ сети $G\setminus\hat{G} = (V, E\setminus\hat{E})$ выполняется $\gamma[x, y] = \gamma_\varepsilon[x, y] = 0$. Будем считать, что в сети $G\setminus\hat{G}$ нет ребер $[x, y]$, таких, что $x\in\hat{V}$, $y\in\hat{V}$. В противном случае каждое такое ребро $[x, y]$ следует превратить в пару ребер $[x, x']$, $[x', y]$, таких, что $c[x, x'] = c[x', y] = c[x, y]$, $a[x, x'] = a[x', y] = 1/2a[x, y]$.* Мы будем рассматривать *текущие потенциалы* $\hat{\pi}$, представляющие собой линейные функции от ε и *2-элементы* $\mathscr{E} = \{\hat{\pi}, s\}$, состоящие из некоторого текущего потенциала $\hat{\pi}$ и некоторого полюса $s\in P$. Каждой вершине $x\in V$ сопоставим строку 2-элементов $st(x) = \{\mathscr{E}_1(x), \mathscr{E}_2(x), \ldots, \mathscr{E}_{k(x)}(x)\}$ по следующим правилам:

1. $x\in\hat{V}$. Если x — изолированный полюс в $\hat{G}$, то $st(x)$ состоит из единственного элемента $\{0, x\}$. Иначе рассмотрим множество $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(x) \subseteq \hat{V}^\nu$, состоящее из двух элементов, если вершина x — нецентральная в (G, ν) и из $2\cdot|P(x)|$ элементов если центральная. Для каждого элемента $\tilde{x}^j$ этого множества определяем совокупность $P(\tilde{x}^j)$ полюсов, которые соответствуют источникам сети $\hat{\Gamma}^\nu$, из которых достижима вершина $\tilde{x}^j$. Тогда элемент $\tilde{x}^j$ порождает в строке $st(x)$ ровно $|P(\tilde{x}^j)|$ 2-элементов вида $\{\hat{\pi}(\tilde{x}^j), s\}$, $s\in P(\tilde{x}^j)$, где:

---

* Такое предположение вводится только для удобства описания способа нахождения ε_2. В действительности можно обойтись без временного вставления новых вершин, повышающего размерность задачи.

$$\hat{\pi}(\tilde{x}^j)=\begin{cases}\urcorner\pi(\tilde{x}^j)\ulcorner, & \text{если } x^j\in X\\ \urcorner\pi(\tilde{x}^j)\ulcorner+\varepsilon, & \text{если } x^j\in W\\ \urcorner\pi(\tilde{x}^j)\ulcorner+2\varepsilon, & \text{если } x^j\in\chi(X).\end{cases}$$

После порождения 2-элементов от всех вершин в $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(X)$ повторяющиеся 2-элементы в $\mathrm{st}(x)$ можно удалить (повторяющиеся элементы возникают, если x — центр в (G, ν)). Из доказательства леммы 10 следует, что если в $\mathrm{st}(x)$ есть элемент $\{\hat{\pi}, s\}$, то при $\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$ вершина x будет находиться в сети (G, ν_ε) на расстоянии $\hat{\pi}(\varepsilon)$ от полюса s.

2. $x\in V\setminus\hat{V}$. Рассмотрим сеть $G\setminus\hat{G}=(V, E\setminus\hat{E})$ и определим расстояния $\rho_\nu(x, y)$ от вершины x до каждой вершины $y\in\hat{V}$. Строка $\mathrm{st}(x)$ получается соединением строк $\mathrm{st}(y)$ всех таких элементов y, что $\rho_\nu(x, y)<\infty$, и одновременным пересчетом текущих потенциалов: если $\mathrm{st}(y)$ содержит 2-элемент $\{\hat{\pi}(y), s\}$, то в строке $\mathrm{st}(x)$ порождается 2-элемент $\{\hat{\pi}(y)+\rho_\nu(x, y), s\}$.

Опишем теперь правило нахождения ε_2. Пусть $\mathrm{st}(x)$ — некоторая строка. Для каждой пары *разнополюсных* 2-элементов $\mathscr{E}_1(x)=\{\hat{\pi}_i, s_i\}$, $\mathscr{E}_2(x)=\{\hat{\pi}_j, s_j\}$ этой строки (т. е. таких, что $s_i\neq s_j$) рассмотрим уравнение $\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)=m+2\varepsilon$. Если решение этого уравнения единственно и положительно, то положим $\varepsilon_{ij}(x)$ равным этому решению, в противном случае положим $\varepsilon_{ij}(x)=\infty$. Определим затем $\varepsilon(x)$, равное минимуму $\varepsilon_{ij}(x)$ по всем разнополюсным элементам $\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_j$ ее строки, и, наконец, определим $\varepsilon_2'=\min_{x\in V}\varepsilon(x)$.

Лемма 11. Величины $\varepsilon\equiv\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и $\varepsilon'\equiv\{\varepsilon_1, \varepsilon_2'\}$ равны.

Доказательство. Пусть ε_2 конечно и $\varepsilon_2\leqslant\varepsilon_1$. Покажем, что $\varepsilon_2'\leqslant\varepsilon_2$. Согласно лемме 10 при $0<\varepsilon<\varepsilon_2$ мы имеем $\mathscr{T}(G, \varepsilon_\varepsilon)=\mathscr{T}(G, \nu)=\mathscr{T}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$, а при $\varepsilon=\varepsilon_2$ имеем $\mathscr{T}(G, \nu_\varepsilon)\supset\mathscr{T}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$. Пусть $\xi_{s,t}\in\mathscr{T}(\hat{G}, \nu_{\varepsilon_2})\setminus\mathscr{T}(G, \nu_\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\varepsilon_2$, т. е. $\xi_{s,t}$ — цепь, становящаяся P, ν_ε-геодезической при $\varepsilon=\varepsilon_2$. Рассмотрим два случая.

1) Цепь $\xi_{s,t}$ целиком лежит в $\hat{G}$. Используя лемму 2 можно доказать, что в $\xi_{s,t}$ найдутся два идущих подряд ребра $[y, x]$ и $[x, z]$, не принадлежащих никакой P, ν_ε-геодезической $(0<\varepsilon<\varepsilon_2)$. Пусть $[y, x]\in\xi'_{s',t'}$, $[x, z]\in\xi''_{s'',t''}$, где $\xi'_{s',t'}\in\mathscr{T}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$, $\xi''_{s'',t''}\in\mathscr{T}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\varepsilon_2$ и пусть для определенности $\xi'_{s',t'}=\langle s', y, x, t'\rangle\,\xi'$, $\xi''_{s'',t''}=\langle s'', x, z, t''\rangle\,\xi''$ (рис. 4). Тогда, применяя лемму 2 к P, ν_{ε_2}-геодезическим $\xi'_{s',t'}$ и $\xi_{s,t}$ с общим ребром $[x, y]$, получаем P, ν_{ε_2}-геодезическую $\tilde{\xi}_{s',t}\equiv\xi'_{s',x}\cdot\xi_{x,t}$ и, далее, применяя лемму 2 к P, ν_{ε_2}-геодезическим $\tilde{\xi}_{s',x}$ и $\xi''_{s'',t''}$, получаем P, ν_{ε_2}-геодезическую $\tilde{\tilde{\xi}}_{s',t''}\equiv\xi'_{s',x}\cdot\xi''_{x,t''}$, т. е. мы получили P, ν_{ε_2}-геодезическую (не являющуюся P, ν_ε-геодезической при $0<\varepsilon<\varepsilon_2$), составленную из участков двух P, ν_ε-геодезических $\xi'_{s',t'}$ от s' до x и $\xi''_{s'',t''}$ от x до t''. Следовательно, в строке $\mathrm{st}(x)$ найдутся 2-элементы $\{\hat{\pi}_i, s'\}$ и $\{\hat{\pi}_j, t''\}$ и соответствующее уравнение $\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)=m+2\varepsilon$ имеет решение $\varepsilon=\varepsilon_2$. Таким образом $\varepsilon_2'\leqslant\varepsilon_2$.

2) $\xi_{s,t}$ не принадлежит $\hat{G}$. Тогда в $\xi_{s,t}$ найдется вершина $x\in V\setminus\hat{V}$. Пусть y и z — ближайшие к x «слева» и «справа» вершины цепи $\xi_{s,t}$, принадлежащие $\hat{V}$. Если y — не полюс, то возьмем произвольную P, ν_ε-геодезическую $\xi'_{s',t'}$ $(0<\varepsilon<\varepsilon_2)$, проходящую через y.

Легко показать, что из участка P, ν_{ε_2}-геодезической $\xi_{s,t}$ от y до t и одного из двух участков цепи $\xi'_{s',t'}$ (от s' до y или от y до t') можно составить P, ν_{ε_2}-геодезическую (пусть это будет $\tilde{\xi}_{s',t}$). Про-

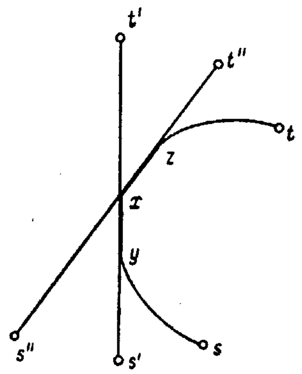

Рис. 4

делаем аналогичное для вершины z, в результате получим P, ν_{ε_2}-геодезическую (скажем, $\tilde{\tilde{\xi}}_{s',t''}$), содержащую участки P, ν-геодезических от s' до y и от z до t''. Следовательно, в строке $\mathrm{st}(x)$ имеются 2-элементы $\{\hat{\pi}_i, s'\}$ и $\{\hat{\pi}_j, t''\}$, образовавшиеся из 2-элементов $\{\hat{\pi}_i(y), s'\}$ и $\{\hat{\pi}_2(z), t''\}$ прибавлением, соответственно, $\rho_\nu[y, x]$ и $\rho_\nu[z, x]$; уравнение $\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)=m+2\varepsilon$ имеет единственное решение $\varepsilon=\varepsilon_2$, откуда $\varepsilon'_2\leqslant\varepsilon_2$.

Покажем теперь, что $\varepsilon'_2\geqslant\varepsilon_2$ (считаем, что $\varepsilon'_2<\varepsilon_1$). Легко проверить, что каждый 2-элемент $\{\hat{\pi}, s\}$ строки $\mathrm{st}(x)$ задает оценку $\rho_{\nu_\varepsilon}[s, x]\leqslant\pi(\varepsilon)$ при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$. Пусть теперь ε'_2 определяется из решения уравнения $\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)=m+2\varepsilon$ для разнополюсных 2-элементов $\{\hat{\pi}_i, s\}$ и $\{\hat{\pi}_j, t\}$ строки $\mathrm{st}(x)$. Поскольку при $\varepsilon<\varepsilon'_2$ справедливо $\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)>m+2\varepsilon$, то, учитывая линейность уравнения, при $\varepsilon>\varepsilon'_2$ имеем

$$\rho_{\nu_\varepsilon}[s, t]\leqslant\rho_{\nu_\varepsilon}[s, x]+\rho_{\nu_\varepsilon}[x, t]\leqslant\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)<m+2\varepsilon.$$

Но поскольку $\varepsilon'_2<\varepsilon_1$, то, согласно доказательству леммы 10, причина возникновения неравенства $\rho_{\nu_\varepsilon}[s, t]<m+2\varepsilon$ при $\varepsilon>\varepsilon'_2$ заключается в том, что появилась новая P, ν_ε-геодезическая, откуда $\varepsilon_2\leqslant\varepsilon'_2$. ■

Таким образом, определение числа ε_2 состоит в построении множеств $\mathrm{st}(x)$, $\forall x\in V$ (каждое множество $\mathrm{st}(x)$ содержит не более $|P|\cdot|\hat{V}|$) 2-элементов и в решении соответствующих линейных уравнений, откуда следует, что нахождение числа $\bar{\varepsilon}$ — эффективная* процедура.

Пусть $\bar{\varepsilon}<\infty$. Определив функции $\gamma'=\gamma_{\bar{\varepsilon}}$ и $\nu'=\gamma'+a$, строим, исходя из сети (G, ν'), сети $G_{\nu'}$, $\tilde{G}_{\nu'}$ и $\Gamma^{\nu'}$. Сеть $G_{\nu'}$ можно получить, определяя для каждого полюса $s\in P$ граф G_s кратчайших путей, соединяющих s с остальными вершинами, при помощи модификации какого-нибудь из алгоритмов нахождения дерева кратчайших путей (например,

* Т. е. имеющая полиномиальную от $|V|$ верхнюю оценку числа действий.

[29, 9]). Далее G_s последовательно «очищается» от вершин и дуг, не лежащих на путях длины $m+2\tilde{\varepsilon}$ из s в остальные полюса; объединяя такие «очищенные» графы G_s и получим G_ν. Можно предложить и другую, более экономную, процедуру построения $G_{\nu'}$. Построение сети $\tilde{G}_{\nu'}$ из $G_{\nu'}$ и сети $\Gamma^{\nu'}$ из $\tilde{G}_{\nu'}$ затруднений не вызывает. Обозначим $\varkappa':\tilde{G}_{\nu'}\to G_{\nu'}\subseteq G$, $\psi':\Gamma^{\nu'}\to\tilde{G}_{\nu'}$ и $\chi':\Gamma^{\nu'}\to\Gamma^{\nu'}$ соответствующие отображения (аналогичные $\varkappa$, ψ и χ).

Ребру $[x, y]\in E$ соответствуют в сети Γ^ν две дуги (x^i, y^j) и (y^{3-j}, x^{3-i}), а в сети $\Gamma^{\nu'}$ — $(x^{i'}, y^{j'})$ и $(y^{3-j'}, x^{3-i'})$, поэтому можно говорить о взаимнооднозначном соответствии β между дугами сетей Γ^ν и $\Gamma^{\nu'}$, не являющихся дугами центров (дуга (x^i, y^j) переходит в $(x^{i'}, y^{j'})$, а дуга (y^{3-j}, x^{3-i}) — в $(y^{3-j'}, x^{3-i'})$. Покажем теперь, как «перенести» поток f' из сети Γ^ν в сеть $\Gamma^{\nu'}$. Сначала определим поток f' на дугах сети $\Gamma^{\nu'}$, не являющихся дугами центров, положив $f'(x^{i'}, y^{j'})=f'(x^i, y^j)$, где $(x^{i'}, y^{j'})=\beta(x^i, y^j)$, а затем доопределим функцию f' до потока на дугах центров. Последнее всегда можно сделать (быть может, неоднозначно). Ход доказательства следующий: поток f' в сети $\hat{\Gamma}^\nu$ «течет по путям» из $\mathscr{L}(\hat{\Gamma}^\nu)$; поскольку $\varkappa\circ\psi(\mathscr{L}(\hat{\Gamma}^{\nu'}))=\mathscr{T}(\hat{G}, \nu_\varepsilon)\subseteq\mathscr{T}(G, \nu')$, $\varepsilon<\tilde{\varepsilon}$, и $\varkappa'\circ\psi'(\mathscr{L}(\Gamma^{\nu'}))=\mathscr{T}(\tilde{G}, \nu')$, то можно говорить о «вложении» множества путей $\mathscr{L}(\hat{\Gamma}^\nu)$ в множество путей $\mathscr{L}(\Gamma^{\nu'})$, что и доказывает возможность доопределения f' в сети $\Gamma^{\nu'}$ по соответствующим путям. Практически доопределение функции f' в дугах центров осуществляется тривиально.

Поскольку неравенство $\gamma'[x, y]>0$ возможно только при $[x, y]\in\hat{E}$ и $\hat{E}\subseteq E_\nu$, то условие A выполняется. Справедливость условия B следует из того, что функция $\gamma[x, y]$ изменялась только для тех ребер $[x, y]$, для которых потоком f' заполнены дуги из $(\varkappa\circ\psi)^{-1}[x, y]$, а значит и дуги из $(\varkappa'\circ\psi')^{-1}[x, y]$.

Таким образом, в случае $\tilde{\varepsilon}<\infty$, мы определили исходные объекты ν', $G_{\nu'}$, $\tilde{G}_{\nu'}\Gamma^{\nu'}$ и $f'(i+1)$-й итерации алгоритма $\mathfrak{A}\langle K_p, \mathrm{cost}\rangle$.

2.5. Сходимость и оценка алгоритма. Определим $\tilde{f}\equiv\equiv1/2(f'+\chi(f'))$ — поток, полученный симметризацией потока f'.

Лемма 12. Если на очередной (i-й) итерации оказалось $\varepsilon=\infty$, то поток $F^{\tilde{f}}$ является решением задачи $\langle a, K_p|c\rangle$.

Доказательство. Выберем такое $\tilde{\varepsilon}$, что $M=m=2\tilde{\varepsilon}\geqslant M_0$ и рассмотрим сеть $(G, \nu_{\tilde{\varepsilon}})$. Поскольку $\varepsilon_1=\infty$, то функция $\gamma_{\tilde{\varepsilon}}$ неотрицательна, а ввиду $\varepsilon_2=\infty$ кратчайшее расстояние $\rho_{\nu_{\tilde{\varepsilon}}}$ между полюсами равно $m+2\tilde{\varepsilon}$, т. е. $a+\gamma_{\tilde{\varepsilon}}$ — K_p, M-функция. На основании леммы 10 мультипоток $F^{\tilde{f}}$ течет по P, $\nu_{\tilde{\varepsilon}}$-геодезическим, т. е. выполнено (2). Из выполнения условия B для сети Γ^ν и потока f' и симметричности функции $\gamma(x^i, y^j)$ следует выполнение условия B и для $\tilde{f}$, откуда следует насыщенность мультипотоком $F^{\tilde{f}}$ ребер $[x, y]\in E$ таких, что $\gamma[x, y]>0$. Изменение функции γ происходит опять-таки на ребрах, соответствующих дугам сети $\tilde{\Gamma}^\nu$, заполненным потоком f' и, следовательно, потоком $\tilde{f}$. Таким образом, для сети $(G, \nu_{\tilde{\varepsilon}})$ и мультипотока $F^{\tilde{f}}$ выполняется соотношение (6). Из всего сказанного следует оптимальность мультипотока F^f (см. в конце § 1). ■

Сходимость алгоритма. Назовем i-ю итерацию алгоритма *позитивной*, если построенный на ней поток f' имеет большую мощность, чем исходный поток f, и *негативной*, если $\|f'\|=\|f\|$.

Лемма 13. Число идущих подряд негативных итераций не более $n-p$, где n — число вершин, p — число полюсов сети G.

Доказательство. Пусть $(i+1)$-я итерация — негативная, и X' — множество вершин подсети допустимых дуг Γ_0^ν, достижимых из S. Из предыдущего (см. леммы 9, 10, следствие 2 и построение потока f' в сети $\Gamma^{\nu'}$) следует, что $\varkappa\circ\psi(X)\subseteq\varkappa'\circ\psi'(X')$. Докажем, что вложение строгое, т. е. $\varkappa\circ\psi(X)\subset\varkappa'\circ\psi'(X')$. Поскольку минимальное возможное число элементов в $\varkappa\circ\psi(X)$ — p, а максимальное — n, то отсюда и будет следовать утверждение леммы. Пусть $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_1$ и $[x, y]$ — ребро в G, на котором было $\gamma[x, y]>0$ и стало $\gamma_{\bar{\varepsilon}}[x, y]=0$. Пусть $[x, y]$ — R^{-}-ребро и множество $(\varkappa\circ\psi)^{-1}[x, y]$ состоит из дуг (x^i, y^j), (y^{3-j}, x^{3-i}) (пусть для определенности $x^i, x^{3-i}\in W$, $y^j\in X$, $y^{3-j}\in\chi(X)$). Тогда дуга (x^i, y^j) насыщена потоком f' и поскольку соответствующая ей дуга $(x^{i'}, y^{j'})=$ $=\beta(x^i, y^j)$ уже принадлежит $E_0^{\nu'}$, то вершина $x^{i'}$ будет помечена, откуда $x\in\varkappa'\circ\psi'(X')$.

Пусть $[x, y]$ — R^{--}-ребро и $x^i, y^{3-j}\in\chi(X)$, а $y^j, x^{3-i}\in X$. Тогда аналогично будет помечена вершина x^i, а это означает «прорыв» из «старого» множества X в «старое» $\chi(X)$, т. е. в этом случае поток увеличивается и итерация позитивная. Пусть теперь $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_2<\varepsilon_1$ и ε_2 определялось из уравнения $\hat{\pi}_i(\varepsilon)+\hat{\pi}_j(\varepsilon)=m+2\varepsilon$ для 2-элементов $\{\hat{\pi}_i, s\}$ и $\{\hat{\pi}_j, t\}$ из $\mathrm{st}(x)$. Если $x\in\hat{V}$, то, как можно убедиться, вершина x становится центральной при $\varepsilon=\bar{\varepsilon}$, а это означает, что в сети $\Gamma_0^{\nu'}$ возникает «прорыв» из «старого» X в «старый» $\chi(X)$ через возникший центр $(\varkappa'\circ\psi')^{-1}(x)$. Пусть теперь $x\in V\setminus\hat{V}$ и y, z — вершины, определенные в доказательстве леммы 11. Тогда возможна одна из трех ситуаций:

а) $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(y)\subset X\cup\chi(X)$, $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(z)\subset X\cup\chi(X)$;

б) $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(y)\subset W$, $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(z)\subset X\cup\chi(X)$;

в) $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(y)\subset X\cup\chi(X)$, $(\varkappa\circ\psi)^{-1}(z)\subset W$.

Можно показать, что соответствующая цепь $\xi_{y,z}\subset G\setminus\hat{G}$ в первом случае обеспечивает «прорыв» из «старого» X в «старый» $\chi(X)$, т. е. $(i+1)$-я итерация будет позитивной, а во втором и третьем случаях как минимум пополнение «старого» множества $\varkappa\circ\psi(X)$ (во втором случае вершиной y, в третьем — вершиной z). ■

Для обоснования конечности общего числа итераций алгоритма нам осталось доказать конечность числа позитивных итераций. Пусть ξ_{s^1,t^2}, где $s^1\in S'$, $t^2\in T$ — некоторый активный путь в сети Γ_0^ν, при помощи которого произошло одно из увеличений потока на рассматриваемой позитивной итерации (увеличивающий путь). Образ $\tilde{\xi}_{s,t}$ пути $\xi_{(s^1,t^2)}$ при отображении $\varkappa\circ\psi$ — это цепь в графе G, соединяющая полюса s и t (быть может, одинаковые) и проходящая через каждую вершину не более двух раз (назовем такую цепь 2-маршрутом). Если дуга (x^i, y^j) — прямая (обратная) в увеличивающем пути ξ_{s^1,t^2}, то соответствующее звено $\{x, y\}$ в $\tilde{\xi}_{s,t}$ назовем прямым (обратным) и его длиной $l\{x, y\}$ будем считать величину $a[x, y]$ (соответственно, $-a[x, y]$); положим также $l(\tilde{\xi}_{s,t})\equiv\Sigma_{\{x,y\}\in\tilde{\xi}_{s,t}} l\{x, y\}$. Очевидно $l(\tilde{\xi}_{s,t})=m$. При переходе от одной итерации к другой расстояние m между ближайшими полюсами, как следует из леммы 10, увеличивается, поэтому любые два маршрута, отвечающие двум увеличивающим путям из s в T различных позитивных итераций различны. Следовательно, число различных позитивных итераций не превосходит числа различных 2-маршрутов с фиксированным разбиением на прямые и обратные звенья (или бинарных 2-маршрутов), а число таких маршрутов конечно (обозначим его $\mathcal{N}(G)$). Поэтому общее число итераций в алгоритме не более $(n-p)\mathcal{N}(G)$, т. е. алгоритм конечен.

Рассмотрим некоторые случаи сетей.

1) Функция $c=c[x, y]$, $[x, y]\in E$ — целочисленная (*c — целочисленная сеть*). Тогда текущий поток f *всегда* целочисленный и, следовательно, поэтому на позитивных итерациях поток увеличивается по крайней мере на единицу и, следовательно, общее число итераций не более $2(n-p)\Sigma_{[x,y]\in E}c[x, y]$. Алгоритм $\mathfrak{A}\langle K_p, \mathrm{Cost}\rangle$ в этом случае гарантирует получение полуцелочисленного решения (т. е. дробность решения не хуже чем для «обыкновенной» свободной задачи).

2) Функция $a=a[x, y]$ — целочисленная (a — целочисленная сеть). Тогда число позитивных итераций не превосходит длины самого длинного 2-маршрута и может быть оценено, как $2\Sigma_{[x,y]\in E}a[x, y]$, а общее число итераций $2(n-p)\Sigma_{[x,y]\in E}a[x, y]$.

3) Разрешим функции $a=a[x, y]$ не быть строго положительной. Решения такой задачи можно осуществить двумя способами. Способ первый заключается в том, чтобы ребрам $[x, y]$ для которых $a[x, y]=0$, придать достаточно малые положительные стоимости, так чтобы это не повлияло на решение исходной задачи. Пусть $\alpha=\min\{|a(\xi')-a(\xi'')|\}$, где минимум берется по всем парам различных бинарных 2-маршрутов ξ', ξ'', соединяющих полюса, причем таких, что $a(\xi')\neq a(\xi'')$. Если положить на ребрах, для которых $a[x, y]=0$, новые стоимости $a[x, y]=\alpha/2n+1$, то длина каждого бинарного 2-маршрута изменится (увеличится) менее чем на α, поэтому если длина одного маршрута была больше длины другого маршрута, то это соответствие сохранится. Отсюда можно вывести, что алгоритм будет отыскивать требуемое решение. Второй способ представляется более предпочтительным. Он заключается в замене функции a двухкомпонентной вектор-функцией $\tilde{a}$:

$$\tilde{a}[x, y]=\begin{cases}(a[x, y], 0), \text{ если } a[x, y]>0;\\ (0, 1), \text{ если } a[x, y]=0;\end{cases}$$

$[x, y]\in E$, и в дальнейшей работе с вектор-функцией a также, как это описано для числовой функции a (заметим, что в сетях $\tilde{G}_\nu$ и Γ^ν мы будем иметь дело уже с трехкомпонентными векторами). Обоснование алгоритма целиком переносится на рассматриваемый случай, поэтому алгоритм будет конечен и будет иметь указанную выше оценку числа итераций. Обратим внимание на случай a-целочисленной сети. В этом случае число различных вектор-длин бинарных 2-маршрутов может быть оценено как $2n\cdot 2\Sigma_{[x,y]\in E}a[x, y]$, поскольку значение первой компоненты вектор-длины целочисленно и не превосходит $2\Sigma_{[x,y]\in E}a[x, y]$, а вторая — не превосходит $2n$.

Подведем итог сказанному в следующей теореме.

Теорема 2. Алгоритм $\mathfrak{a}\langle K_p, \mathrm{Cost}\rangle$ решает задачу $\langle a, K_p|c\rangle$ при произвольных V, P, $a\in\mathscr{E}_+$, $c\in\mathscr{E}_+$ т. е. для произвольной сети $N=(V, P; c)$ и функции стоимости $a\in\mathscr{E}_+$, причем:

а) если функции a, c — произвольные, то число действий в алгоритме оценивается сверху как $O(\mathcal{N}(G)\cdot P|V|)$, где $\mathcal{N}(G)$ — число различных бинарных 2-маршрутов, оканчивающихся в P, в графе $G=(V, E)$ (где $E=\{[x, y]\in[V]^d|c[x, y]>0\}$), а $P(|V|)$ — некоторый полином от $|V|$*;

* Этот полином связан с оценкой трудоемкости выполнения одной итерации.