ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1985

ТОМ 280 № 4

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

УДК 519.95

А.В. КАРЗАНОВ

О МНОГОПРОДУКТОВЫХ ПОТОКОВЫХ ЗАДАЧАХ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л.В. Канторовичем 2 III 1984)

В работе даются достаточные условия существования целочисленного оптимального решения задачи о максимальном многопродуктовом потоке в неориентированной сети и предлагается алгоритм нахождения такого решения с полиномиальным числом действий. Это усиливает ряд известных результатов о целочисленных и полуцелочисленных многопродуктовых потоках.

1. Пусть $G = (V, E)$ и $H = (T, U)$ – конечные неориентированные графы и $T \subseteq V$; ребро графа с концевыми вершинами x и y может быть обозначено xy. Под st-ц е п ь ю в G, где $s, t \in V$, $s \neq t$, понимается множество ребер $L \subseteq E$ такое, что $L = \{x_i x_{i+1}: i = 0, 1, \ldots, k\}$ для некоторых различных вершин $s = x_0, x_1, \ldots, x_k = t$. Задача о максимальном многопродуктовом потоке в неориентированной сети допускает следующую формулировку (з а д а ч а $\mathcal{P}(G, c, H)$): для заданной функции c: $E \to \mathbf{R}_+$ (пропускных способностей ребер) найти функцию f: $\mathcal{L} \to \mathbf{R}_+$, удовлетворяющую условию упаковки

$$(*)\qquad \zeta^f(e) \overset{\text{def}}{=} \Sigma(f(L)\colon e \in L \in \mathcal{L}) \leqslant c(e) \qquad \forall e \in E$$

и максимизирующую величину $1 \cdot f = \Sigma(f(L): L \in \mathcal{L})$. Здесь $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G, H)$ – множество всех st-цепей в G при $st \in U$ и $\mathbf{R}_+$ – множество неотрицательных вещественных чисел. Функция f, удовлетворяющая $(*)$, называется д о п у с т и м ы м м у л ь т и п о т о к о м (многопродуктовым потоком) в сети (G, c) с потоковой схемой H; максимум $1 \cdot f$ по допустимым f обозначим $v(G, c, H)$.

Функцию c назовем в н у т р е н н е ч е т н о й, если она целочисленная и $\Sigma(c(xy): y \in V - \{x\})$ четно для всех $x \in V - T$. Скажем, что H р а з р е ш и м о в $\frac{1}{k}\mathbf{Z}_+$ (р а з р е ш и м о в $\frac{1}{k}\mathbf{Z}_+$ п р и у с л о в и и в н у т р е н н е й ч е т н о с т и), если для любого графа $G = (V, E)$, $V \supseteq T$, и любой функции c: $E \to \mathbf{Z}_+$ (внутренне четной функции c) задача $\mathcal{P}(G, kc, H)$ имеет целочисленное оптимальное решение f, где $\mathbf{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел и k – некоторое натуральное число.

Известно, что H разрешимо в $\mathbf{Z}_+$ при $|U| = 1$ [1] и разрешимо в $\mathbf{Z}_+$ при условии внутренней четности, если $|U| = 2$ [2] или если H – полный граф [3]. В [4] указан широкий класс потоковых схем, разрешимых в $\frac{1}{2}\mathbf{Z}_+$. А именно, пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ обозначает множество всех антиклик (т.е. максимальных по включению независимых множеств вершин) в H. Множество $\mathcal{A}$ называется д в у д о л ь н ы м, если существует его разбиение $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, в котором каждое $\mathcal{A}_i$ состоит из попарно не пересекающихся антиклик. Например, а) если $T = \{s, t, p, q\}$ и $U = \{st, pq\}$, то $\mathcal{A} = \{\{s, p\}, \{s, q\}, \{t, p\}, \{t, q\}\}$, б) если H – полный граф, то $\mathcal{A} = \{\{s\}: s \in T\}$; в обоих случаях $\mathcal{A}$ двудольное. В [4] показывается (подробности см. в [5]), что если $\mathcal{A}(H)$ двудольное, то H разрешимо в $\frac{1}{2}\mathbf{Z}_+$, и предлагается алгоритм нахождения полуцелочисленного оптимального решения с числом действий, ограниченным полиномом от $|V|$, умноженным на $c(E)$ (здесь и далее для g: $S \to \mathbf{R}$ и конечного подмножества $S' \subseteq S$ через $g(S')$ обозначается $\Sigma(g(s): s \in S'))$. В настоящей работе дается усиление этих результатов.

Т е о р е м а 1. *Если множество* $\mathcal{A}(H)$ *двудольное и функция* c *внутренне четная, то задача* $\mathcal{P}(G, c, H)$ *имеет целочисленное оптимальное решение.*

Мы приводим схему доказательства теоремы 1 и описываем алгоритм (для двудольного $\mathcal{A}$) с числом действий, ограниченным полиномом от $|V|$, отыскивающий вещественное оптимальное решение при $c\colon E \to \mathbf{R}_+$ и целочисленное – при внутренне четном c. Отметим, что из теоремы 1 и эффективной конструкции в [4, 5] следует

Т е о р е м а 2. *Если каждая вершина в* H *принадлежит не более чем двум антикликам, то* H *разрешимо в* $\frac{1}{2}\mathbf{Z}_+$ *при условии внутренней четности.*

2. С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Не теряя общности будем считать, что граф G полный. Пусть $c\colon E \to \mathbf{R}_+, \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ – соответствующее разбиение $\mathcal{A}$ и $f\colon \mathcal{L} \to \mathbf{R}_+$ – некоторое оптимальное решение (OP) задачи $\mathcal{P}(c)$ (для $\mathcal{P}(G, c, H)$ и $v(G, c, H)$ далее применяются сокращенные обозначения $\mathcal{P}(c)$ и $v(c)$). Положим $\mathcal{L}^+(f) = \{L \in \mathcal{L}\colon f(L) > 0\}$.

Для $X \subseteq V$ пусть $\partial X = \partial^G X$ обозначает множество ребер в G с одним концом в X и другим в $V - X$ (р а з р е з графа G). Семейство подмножеств $\mathcal{X} = \{X_A \subset V\colon A \in \mathcal{A}\}$ (допускающее пустые подмножества) назовем п о л у п р а в и л ь н ы м, если $X_A \cap T \subseteq A \quad \forall A \in \mathcal{A}$ и каждый элемент из T принадлежит ровно одному X_A. Если к тому же множества в $\mathcal{X}$ попарно не пересекаются, $\mathcal{X}$ называется п р а в и л ь н ы м. Положим $c(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\Sigma(c(\partial X_A)\colon A \in \mathcal{A})$. Очевидно, $c(\mathcal{X}) \geqslant v(c)$ для любого полуправильного $\mathcal{X}$.

Л е м м а. $c(\mathcal{X}) = v(c)$ *для некоторого правильного* $\mathcal{X}$.

Эта лемма фактически следует из алгоритма в [4]. Другое, прямое и более простое ее доказательство состоит в следующем. Пусть $l\colon E \to \mathbf{R}_+$ – оптимальное решение задачи, двойственной к $\mathcal{P}(c)$ в смысле линейного программирования, т.е. $l(L) \geqslant 1 \quad \forall L \in \mathcal{L}$ и $c \cdot l = v(c)$. Обозначим через μ метрику в G, порождаемую l, т.е. $\mu(xy) = \min\{l(L)\colon L - xy$ – цепь в $G\}$ при $x, y \in V$, $x \neq y$, и $\mu(xy) = 0$ при $x = y$. Для $s, t \in T$ (допуская $s = t$) будем писать $s \nsim t$, если нет таких $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$, что $s, t \in A \cap B$. Для $A \in \mathcal{A}$ и $x \in V$ положим

$$r_A(x) = \min\{\mu(sx)\colon s \in A\}, \qquad d_A(x) = \min\{\mu(sx) + \mu(tx)\colon s, t \in A,\ s \nsim t\}.$$

Определим требуемое семейство $\mathcal{X} = \{X_A\colon A \in \mathcal{A}\}$ как

$$X_A = \{x \in V\colon d_A(x) < \tfrac{1}{2}\}, \qquad A \in \mathcal{A}_1,$$

$$X_A = \{x \in V\colon d_A(x) \leqslant \tfrac{1}{2}\} \cup \{x \in V\colon r_A(x) = 0,\ d_B(x) \geqslant \tfrac{1}{2} \quad \forall B \in \mathcal{A} - \{A\}\},$$
$$A \in \mathcal{A}_2.$$

Доказывается, что:

а) $\mathcal{X}$ – правильное семейство,

б) $\zeta^f(e) = c(e)$ для любых $A \in \mathcal{A}$ и $e \in \partial X_A$,

в) $|\partial X_A \cap L| \leqslant 1$ для любых $A \in \mathcal{A}$ и $L \in \mathcal{L}^+(f)$, откуда легко получить $c(\mathcal{X}) = 1 \cdot f = v(c)$.

Пусть, далее, c – внутренне четная функция. Нетрудно убедиться, что величина $c(\mathcal{X})$ целая для любого полуправильного $\mathcal{X}$, тем самым справедливо

С л е д с т в и е. *Величина* $v(c)$ *целая.*

Семейство $\mathcal{X}$ назовем c-м и н и м а л ь н ы м, если $c(\mathcal{X}) = v(c)$; пусть $\mathcal{M}(c)$ – множество всех c-минимальных правильных семейств. Дальнейшее доказательство ведется по индукции. Предположим, что при фиксированных G и H теорема верна для всех внутренне четных c' таких, что либо $|\mathcal{M}(c')| > |\mathcal{M}(c)|$, либо $|\mathcal{M}(c')| = |\mathcal{M}(c)|$ и $c'(E) < c(E)$. Теорема очевидна при $c = 0$ (отметим, что в этом случае всякое правильное семейство является c-минимальным, т.е. $|\mathcal{M}(c)|$ – максимально возможное). Тройку вершин $\tau = xyz$, в которой $y \neq x, z$, назовем вилкой; определим θ_τ: $E \to \mathbf{R}_+$ и $\beta_\tau, \alpha_\tau \in \mathbf{R}_+$ как:

а) $\theta_\tau(xy) = \theta_\tau(yz) = 1$, $\theta_\tau(xz) = -1$, $\theta_\tau(e) = 0$ $(e \in E - \{xy, yz, xz\})$ при $x \neq z$ и $\theta_\tau(xy) = 2$, $\theta_\tau(e) = 0$ $(e \in E - \{xy\})$ при $x = z$,

б) $\beta_\tau = \min\{c(xy), c(yz)\}$ при $x \neq z$ и $\beta_\tau = \frac{1}{2}c(xy)$ при $x = z$,

в) $\alpha_\tau = \max\{a\colon a \leqslant \beta_\tau,\ v(c - a\theta_\tau) = v(c)\}$. Из леммы нетрудно получить

1) (i) Если $0 < \alpha_\tau < \beta_\tau$, то $\mathcal{M}(c) \subset \mathcal{M}(c - \alpha_\tau\theta_\tau)$.

(ii) Имеется γ, $\alpha_\tau \leqslant \gamma \leqslant \beta_\tau$, такое, что $v(c - a\theta_\tau) = v(c) - (a - \alpha_\tau)$ при $\alpha_\tau \leqslant a \leqslant \gamma$ и $v(c - a\theta_\tau) = v(c) - (\gamma - \alpha_\tau) - 2(a - \gamma)$ при $\gamma \leqslant a \leqslant \beta_\tau$.

Вилку $\tau = xyz$ назовем существенной (относительно f), если $x \neq z$ и имеется цепь $L \in \mathcal{L}^+(f)$, содержащая xy и yz; очевидно, $\alpha_\tau \geqslant f(L) > 0$. Если $|L| = 1$ для всех $L \in \mathcal{L}^+(f)$, то, очевидно, мультипоток f целочисленный, поэтому мы можем считать, что множество существенных вилок непусто. Наша цель – доказать, что имеется вилка $\tau = xyz$, для которой $\alpha_\tau \geqslant 1$. Тогда доказательство теоремы 1 завершается следующим образом. Пусть $c' = c - \theta_\tau$. Ясно, что $c'(E) \leqslant c(E) - 1$, функция c' внутренне четная и $\mathcal{M}(c) \subseteq \mathcal{M}(c')$, откуда по индукции задача $\mathcal{P}(c')$ имеет целочисленное ОР f'. Теперь требуемое целочисленное ОР f^* для $\mathcal{P}(c)$ определяется как:

а) $f^* = f'$, если либо $x = z$, либо $x \neq z$ и $\zeta^{f'}(xz) \leqslant c(xz)$, и

б) $f^*(L) = f'(L) - 1$, $f^*(L') = f'(L') + 1$, $f^*(L'') = f'(L'')$ $(L'' \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, если $x \neq z$ и $\zeta'(xz) = c(xz) + 1$ $(=c'(xz))$, где L – некоторая цепь в $\mathcal{L}^+(f')$, содержащая ребро xz, и L' – цепь в $\mathcal{L}$, содержащаяся в $(L - \{xz\}) \cup \{xy, yz\}$.

Предположим, что $\alpha_\tau < 1$ для каждой существенной вилки τ. Из леммы легко следует

2) Пусть $\tau = xyz$ – существенная вилка и $c' = c - \frac{1}{2}\theta_\tau$. Тогда:

(i) $\alpha_\tau = \frac{1}{2}$,

(ii) имеется такое правильное семейство $\mathcal{X} = \{X_A\colon A \in \mathcal{A}\}$, что $c(\mathcal{X}) - 1 = v(c) = c'(\mathcal{X})$, и для некоторых $A, B \in \mathcal{A}$ справедливо $x, z \in X_A \subsetneq V - \{y\}$ и $y \in X_B \subsetneq V - \{x, z\}$.

Из 2) (i) и 1) (i) получаем, что для внутренне четной функции $c'' = 2c'$ выполняется $\mathcal{M}(c) \subset \mathcal{M}(c'')$, откуда по индукции задача $\mathcal{P}(c'')$ имеет целочисленное ОР. Следовательно, задача $\mathcal{P}(c)$ имеет полуцелочисленное ОР; будем использовать для него прежнее обозначение f. Пусть, кроме того, величина $\zeta^f(E)$ минимальна по всем полуцелочисленным ОР задачи $\mathcal{P}(c)$.

3) Пусть имеется последовательность существенных вилок $x_1yx_2, x_2yx_3, \ldots, x_kyx_1$, $k \geqslant 3$, где все вершины $x_1, x_2, \ldots, x_k$ различные. Тогда для $\tau = x_1yx_3$ справедливо $\alpha_\tau \geqslant 1$.

4) Пусть ни для какого $y \in V$ не существует последовательности существенных вилок, указанной в (3). Тогда $|L| = 1$ для всех $L \in \mathcal{L}^+(f)$.

Утверждения (3) и (4) ключевые, они завершают доказательство теоремы. В них используется тот факт, что $f(L) = \frac{1}{2}$ для всех $L \in \mathcal{L}^+(f)$ с $|L| > 1$, а также следствие из 2) (ii): если $xyz, \mathcal{X}, A, B$ – объекты, указанные в (2), и $L \in \mathcal{L}^+(f)$ содержит xy и yz, то:

а) $\zeta^f(e) = c(e)$ для любых $C \in \mathcal{A}$ и $e \in \partial X_C$,

б) $|L' \cap \partial X_C| \leqslant 1$ $\quad \forall L' \in \mathcal{L}^+(f) - \{L\}$, $C \in \mathcal{A}$,

в) $|L \cap \partial X_A| = 3$, $|L \cap \partial X_D| \leqslant 1$ $\quad \forall D \in \mathcal{A} - \{A, B\}$.

3. Алгоритм. Он основан на той же идее декомпозиции сети путем "отделения" вилок, что и доказательство теоремы 1. В нем используется описываемая в п. 4 процедура нахождения числа $v(c)$. Мы рассматриваем вначале случай c:

$E \to \mathbf{R}_+$. Прежде всего определяем число $v = v(c)$. На основном этапе алгоритма последовательно перебираются вершины в G и для каждого $y \in V$ последовательно перебираются вилки xyz. Для очередной вилки $\tau = xyz$ и текущей функции c находим α_τ следующим способом (используя 1) (ii)). Полагаем $a := \beta_\tau$ и, если $a > 0$, вычисляем $v' = v(c - a\theta_\tau)$. Если $h' = v - v' > 0$, то полагаем $a := a - \frac{1}{2}h'$ и вычисляем $v'' = v(c - a\theta_\tau)$. Если опять $h'' = v - v'' > 0$, то полагаем $a := a - h''$. Полученное a и есть требуемое α_τ. Полагаем $c := c - \alpha_\tau\theta_\tau$ и переходим к просмотру следующей вилки. Для окончательной функции $\tilde{c}$ будет справедливо $\tilde{c}(e) = 0$ $\forall e \in E - U$, т.е. функция $\tilde{f}$, определенная как $\tilde{f}(\{st\}) = \tilde{c}(st)$, $st \in U$, $\tilde{f}(L) = 0$ $L \in \mathcal{L} - U$, есть ОР задачи $\mathcal{P}(\tilde{c})$. На завершающем этапе алгоритма по $\tilde{f}$ и последовательности чисел α_τ очевидным образом строится ОР исходной задачи $\mathcal{P}(c)$.

В случае, когда функция c внутренне четная и требуется построить целочисленное ОР для $\mathcal{P}(c)$, отличие в алгоритме состоит лишь в том, что текущая функция c всякий раз преобразуется как $c := c - \lfloor \alpha_\tau \rfloor \theta_\tau$, где $\lfloor b \rfloor$ – целая часть числа b.

4. Построение c-минимального семейства. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ возьмем копию G_A графа G; копию вершины $x \in V$ в G_A обозначим x_A. Определим пропускные способности ребер в G_A: $d(x_A y_A) = 2c(xy)$, если $x, y \in A \cap B$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, и $d(x_A y_A) = c(xy)$ – иначе. Склеим эти графы, отождествляя вершины s_A и s_B, а также ребра $s_A t_A$ и $s_B t_B$ для каждых $A, B \in \mathcal{A}$, $s, t \in A \cap B$. Наконец образуем граф $\Gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, добавив к полученному графу вершины s^0 и t^0 и следующие ребра бесконечной пропускной способности: 1) $s^0 s_A$, $A \in \mathcal{A}_1$, $s \in \tilde{A}$; 2) $s^0 t_A$, $A \in \mathcal{A}_2$, $t \in T - A$; 3) $t^0 t_A$, $A \in \mathcal{A}_1$, $t \in T - A$; 4) $t^0 s_A$, $A \in \mathcal{A}_2$, $s \in \tilde{A}$, где $\tilde{A} = A - \cup(B\colon B \in \mathcal{A} - \{A\})$.

Пусть $\mathcal{Y}$ – множество всех $Y \subset \mathcal{V}$ таких, что $s^0 \in Y \subseteq \mathcal{V} - \{t^0\}$ и разрез $\partial^\Gamma Y$ не содержит ребер бесконечной пропускной способности. Можно проверить, что отображение φ, сопоставляющее каждому $Y \in \mathcal{Y}$ семейство $\{X_A\colon A \in \mathcal{A}\}$, где $X_A = \{x \in V\colon x_A \in Y\}$ для $A \in \mathcal{A}_1$ и $X_A = \{x \in V\colon x_A \in \mathcal{V} - Y\}$ для $A \in \mathcal{A}_2$, есть биекция между $\mathcal{Y}$ и множеством полуправильных семейств, и при этом $d(\partial^\Gamma Y) = 2c(\varphi(Y))$. Следовательно, построение c-минимального семейства и определение величины $v(c)$ сводится к построению минимального разреза для Γ и d, "отделяющего" s^0 от t^0.

Заметим, что $|\mathcal{V}| \leqslant nt + 2$ ввиду двудольности $\mathcal{A}$, где $n = |V|$ и $t = |T|$. Таким образом, алгоритм в п. 3 имеет оценку числа действий $O(n^3\sigma(tn))$, где $\sigma(q)$ – оценка числа действий применяемой процедуры построения максимального потока и минимального разреза в сети с q вершинами. Отметим, что имеется модификация алгоритма, в которой для каждого $y \in V$ просматривается только $O(n)$ вилок, вследствие чего получается оценка $O(n^2\sigma(tn))$.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт системных исследований, Москва

Поступило
4 III 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 2. *Rothschild B., Whinston A.* – Oper. Rescarch, 1966, vol. 14, p. 377–387. 3. *Черкасский Б.В.* – Экономика и математические методы, 1977, т. 13, № 1, с. 143–151. 4. *Карзанов А.В., Ломоносов М.В.* В кн.: Математическое программирование. М.: ВНИИСИ, 1978, вып. 1, с. 59–66. 5. *Карзанов А.В.* В кн.: Комбинаторные методы в потоковых задачах. М.: ВНИИСИ, 1979, вып. 3, с. 6–69.