МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Межведомственный тематический сборник научных трудов

Издание Омского
университета

Омск I987

А.В. Карзанов
Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований АН СССР

ОДИН КЛАСС ЗАДАЧ О МАКСИМАЛЬНЫХ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ПОТОКАХ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

В работе [I] утверждалось существование целочисленных оптимальных решений для одного весьма широкого класса задач о максимальных по суммарной мощности многопродуктовых потоках в неориентированных сетях и приводился набросок полиномиального алгоритма, отыскивающего такие решения. В настоящей работе дается полное изложение этих результатов.

I. Введение

Под г р а ф о м будем понимать конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер; ребро с концевыми вершинами x и y может быть обозначено xy. Ц е п ь ю (xy - ц е п ь ю) графа будем считать его подграф $L=(VL, EL)$, в котором множества вершин и ребер имеют вид $VL=\{x=x_0, x_1, \dots, x_k=y\}$ и $EL=\{x_i x_{i+1} : i=0,\dots,k-1\}$; иногда цепь L будем обозначать также $x_0 x_1 \dots x_k$.

Мы будем иметь дело со следующими объектами: (основным) графом $G=(V,E)$, на ребрах которого заданы пропускные способности $c(e)\geq 0, e\in E$, и графом $H=(T,U)$ без изолированных вершин, для которого $T\subseteq V$. Пара (G,c), граф H и множество его вершин T будут называться, соответственно, (потоковой) с е т ь ю, (потоковой) с х е м о й и множеством п о л ю с о в сети.

Мы рассматриваем известную задачу о максимальном многопродуктовом потоке в сети (G,c) с потоковой схемой H. Нам удобно будет формулировать ее в виде задачи об упаковке цепей. Для $x,y\in V$ пусть $\mathcal{L}(G,xy)$ обозначает множество всех xy - цепей в G. Положим $\mathcal{L}=\mathcal{L}(G,H)=\cup(\mathcal{L}(G,st): st\in U)$. Функция $f:\mathcal{L}\to\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ - множество неотрицательных вещественных чисел) называется многопродуктовым потоком, или м у л ь т и п о т о к о м; мультипоток f называется c - д о п у с т и м ы м, если выполняются ограничения по пропускным способностям

$$(*)\quad \zeta^f(e)\overset{\text{def}}{=}\sum(f(L): L\in\mathcal{L}, e\in EL)\leq c(e),\quad e\in E.$$

З а д а ч а I. $\mathcal{P}=\mathcal{P}(G,c,H)$: найти c - допустимый мультипоток f, имеющий максимальную суммарную мощность

$$l\cdot f=\Sigma(f(L): L\in\mathcal{L}).$$

Максимум величин $l\cdot f$ по всем c - допустимым f обозначается $v=v(G,c,H)$.

В теории дискретной оптимизации весьма актуальным является вопрос о том, какие массовые задачи имеют допустимые или оптимальные решения ограниченной дробности. В нашем случае это понятие конкретизируется следующим образом. Будем классифицировать задачи $\mathcal{P}(G,c,H)$ по виду схемы $H=(T,U)$. Скажем, что схема H (и массовая задача с этой схемой) *разрешима* в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_+$ - множество неотрицательных целых чисел и $k\in\mathbb{Z}_+-\{0\}$, если для любого графа $G=(V,E)$, $V\supseteq T$, и функции $c:E\to\mathbb{Z}_+$ задача $\mathcal{P}(G,c,H)$ имеет оптимальное решение f такое, что $kf(L)$ - целое для всех $L\in\mathcal{L}(G,H)$, иначе говоря, задача $\mathcal{P}(G,kc,H)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Скажем, что схема H *имеет ограниченную дробность*, если H разрешимо в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$ для некоторого натурального k.

Нам понадобятся также следующие понятия. Для $X\subseteq V$ множество ребер в G с одним концом в X и другим в $V-X$ обозначается $\partial X=\partial^G X$ и называется разрезом в G (мы допускаем $X=\emptyset$ или $X=V$). Функцию c назовем *внутренне четной*, если она целочисленная и величина $c(\partial X)$ четна для любого $X\subseteq V-T$ (для произвольных $g:E\to\mathbb{R}$ и $E'\subseteq E$ через $g(E')$ обозначается величина $\Sigma(g(e): e\in E')$). Скажем, что схема H *разрешима* в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$ *при условии внутренней четности*, если для любого графа $G=(V,E)$, $V\supseteq T$, и внутренне четной функции c на E задача $\mathcal{P}(G,kc,H)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Ясно, что если H разрешимо в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности, то оно разрешимо в $\frac{1}{2k}\mathbb{Z}_+$.

По классической теореме Форда и Фалкерсона H разрешимо в $\mathbb{Z}_+=\frac{1}{1}\mathbb{Z}_+$ при $|U|=1$ (в этом случае мы имеем обычную задачу о максимальном потоке в неориентированной сети); этот факт легко обобщается на произвольные полные двудольные графы H. Можно показать, что если H не является полным графом, то H не разрешимо в $\mathbb{Z}_+$. Хорошо известна разрешимость в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ схемы с двумя ребрами (теорема Хью о полуцелочисленных двухпродуктовых потоках [2]) и схемы, являющейся полным двудольным графом с произвольным числом вершин [3, 4, 5]. Это усилено, соответственно, в работах [6] и [4], где для указанных схем была доказана разрешимость в $\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности. В [7] была

установлена разрешимость в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ некоторых схем, представимых в виде объединения двух полных двудольных графов. Наконец, в [8] были найдены широкие, обобщающие все ранее известные классы схем, разрешимых в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ и $\frac{1}{4}\mathbb{Z}_+$. Эти классы определяются в терминах семейства $\mathcal{A}=\mathcal{A}(H)$ всех антиклик графа H (*антикликой* графа называется максимальное по включению независимое, т. е. порождающее пустой подграф, подмножество его вершин).

Определения. Семейство антиклик $\mathcal{A}$ называется *двудольным*, если существует его разбиение $\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$, в котором каждое $\mathcal{A}_i$ состоит из попарно не пересекающихся антиклик. Семейство $\mathcal{A}$ называется *3-незацепленным*, если в нем нет трех попарно пересекающихся антиклик. Семейство называется *совершенным*, если для любых трех различных антиклик A,B,C таких, что $A\cap B\ne\emptyset$, $B\cap C\ne\emptyset$, $C\cap A\ne\emptyset$, справедливо $A\cap B=B\cap C=C\cap A$.

Каждый следующий из указанных трех классов семейств включает предыдущий как собственное подмножество. Например: а) если H содержит только два ребра или является полным графом, то $\mathcal{A}$ двудольное; б) если H является циклом длины 5, то $\mathcal{A}$ 3-незацепленное, но не двудольное; в) если H состоит из треугольника и не смежного с ним ребра, то $\mathcal{A}$ совершенное, но не 3-незацепленное; если H состоит из трех попарно не смежных ребер, то H несовершенное.

В [8] утверждалось: (i) если $\mathcal{A}$ двудольное, то H разрешимо в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$; (ii) если $\mathcal{A}$ 3-незацепленное, то H разрешимо в $\frac{1}{4}\mathbb{Z}_+$. Доказательство (i) следовало из псевдополиноминального алгоритма, решающего задачу $\mathcal{P}(G,c,H)$ при целочисленном c и двудольном $\mathcal{A}(H)$ (число действий этого алгоритма оценивается полиномом от $|V|$ и $|T|$, умноженным на $c(E)$). Утверждение (ii) следовало из эффективной конструкции, сводящей задачу $\mathcal{P}(G,c,H)$ с 3-незацепленным $\mathcal{A}(H)$ к задаче $\mathcal{P}(G',c',H')$ с двудольным $\mathcal{A}(H')$, при этом каждому допустимому решению второй задачи соответствует допустимое решение первой задачи вдвое большей дробности. Подробности доказательства (i) и (ii) приведены в [9, п. 5]. Наконец, недавно автор получил полное описание класса схем ограниченной дробности, доказав, что таковыми являются схемы H с совершенным $\mathcal{A}(H)$ и только они (более того, оказалось, что если $\mathcal{A}(H)$ совершенное, то H разрешимо в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности).

В настоящей работе дается доказательство теоремы, усиливающей результат в [8] для двудольных семейств, а также полиномиальный алгоритм решения соответствующей задачи; краткие схемы доказательства и алгоритма были приведены в [1].

Т е о р е м а 1. Если семейство $\mathcal{A}(H)$ двудольное и функция c внутренне четная, то задача $\mathcal{P}(G,c,H)$ имеет целочисленное оптимальное решение (иначе говоря, всякая схема H с двудольным $\mathcal{A}$ разрешима в $\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности).

Доказательство теоремы 1 – неконструктивное и делится на две части. В разделе 2 устанавливается специальный вид оптимального двойственного решения (теорема 2.1.), этот результат следует из алгоритма в [8], но здесь мы дадим его прямое и существенно более короткое доказательство. Используя этот факт, мы показываем в разделе 3, что сеть (G,c) может быть последовательно редуцирована к простейшей сети, для которой существование целочисленного оптимального решения будет очевидно, и тем самым докажем теорему 1. Наконец, в разделе 4 будет описан полиномиальный алгоритм решения задачи $\mathcal{P}(G,c,H)$ с двудольным $\mathcal{A}(H)$ как при внутренне четном c (с требованием целочисленности решения), так и при $c: E \to \mathbb{R}_+$. Число действий алгоритма – $O(n^3\sigma(tn))$, где $n=|V|$, $t=|T|$ и $\sigma(n')$ – трудоемкость нахождения максимального потока в сети n' вершинами. В отличие от алгоритма в [8], этот алгоритм основан на декомпозиции сети, а не на прямом построении максимального мультипотока.

2. Минимальные правильные семейства

В дальнейшем для $\mathcal{P}(G,c,H)$, $v(G,c,H)$, $\mathcal{A}(H)$ и $\mathcal{L}(G,H)$ будем применять сокращенные обозначения $\mathcal{P}(c)$, $v(c)$, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$. Пусть $c: E \to \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}$ – двудольное семейство и $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ – его разбиение ($A \cap B = \emptyset$ для любых различных $A, B \in \mathcal{A}_i$, $i=1,2$).

Семейство $\mathcal{X} = \{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ назовем п о л у п р а в и л ь н ы м, если (i) $X_A \subset V$ и $X_A \cap T \subseteq A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$ (допускается $X_A = \emptyset$) и (ii) каждый полюс $s \in T$ принадлежит ровно одному множеству $X_A \in \mathcal{X}$. Полуправильное семейство $\mathcal{X}$, состоящее из попарно не пересекающихся множеств, называется п р а в и л ь н ы м. Определим пропускную способность $c(\mathcal{X})$ полуправильного семейства $\mathcal{X}$ как $\frac{1}{2}\sum(c(\partial X_A) : A \in \mathcal{A})$.

Т е о р е м а 2.1. $v(c)$ равно минимуму величин $c(\mathcal{X})$ по всем полуправильным семействам $\mathcal{X}$, причем минимум достигается на некотором правильном семействе.

Доказательство состоит из ряда утверждений. Пусть $f: \mathcal{L} \to \mathbb{R}_+$ – некоторый оптимальный мультипоток, и пусть $\mathcal{L}^+(f)$ обозначает множество $\{L \in \mathcal{L} : f(L) > 0\}$. Скажем, что подмножество $X \subseteq V$ н а с ы щ е н о f, если $\xi^f(e) = c(e)$ для каждого $e \in \partial X$ (т.е. f насыщает каждое ребро разреза ∂X), X с о г л а с о в а н о с $L \in \mathcal{L}$, если $|\partial X \cap EL| \leq 1$, и X с о г л а с о в а н о с f, если оно согласовано с каждой цепью в $\mathcal{L}^+(f)$. Из определения полуправильного семейства $\mathcal{X}$ следует, что для любого $st \in \mathcal{U}$ существуют и единственны множества $X_A, X_B \in \mathcal{X}$ такие, что $s \in X_A \not\ni t$ и $s \notin X_B \ni t$. Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

(2.2) Для любого полуправильного семейства $\mathcal{X}$ справедливо $c(\mathcal{X}) \geq v(c)$, и равенство выполняется в том и только в том случае, когда каждое множество $X_A \in \mathcal{X}$ насыщено и согласовано с f.

Две пересекающиеся антиклики будем называть с м е ж н ы м и. Будем говорить, что $s \in T$ является 1 - п о л ю с о м (2- п о л ю с о м), если s принадлежит ровно одной (двум) антикликам. Для полюсов s и t (не обязательно различных) будем применять обозначение $s \sim t$, если $s, t \in A \cap B$ для некоторых смежных антиклик A и B, и обозначение $s \not\sim t$ – в противном случае. В частности, $s \sim s$, если s – 2-полюс, и $s \not\sim s$, если s – 1-полюс. Из 3-незацепленности $\mathcal{A}$ тривиально следует

(2.3) Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. (i) Если $s, t \in A$, $s \not\sim t$, $p \in T - A$, то по крайней мере одно из ребер sp и tp принадлежит $\mathcal{U}$. (ii) Если $st \in \mathcal{U}$ и $s' \sim s$, то $s't \in \mathcal{U}$. (iii) Если A и B смежны и либо $s \in A \cap B$, $t \in T - (A \cup B)$, либо $s \in A - B$, $t \in B - A$, то $st \in \mathcal{U}$.

Пусть $\ell : E \to \mathbb{R}_+$ – оптимальное решение задачи $\mathcal{P}^*(c)$, двойственной к $\mathcal{P}(c)$ (рассматриваемой как задача линейного программирования), т.е. $\ell(EL) \geq 1$ для всех $L \in \mathcal{L}$ и $\sum(c(e)\ell(e) : e \in E) = v(c)$. Для произвольных $x, y \in V$ положим $\mu(xy) = \min\{\ell(EL) : L \in \mathcal{L}^{xy}\}$, т.е. μ – метрика, устанавливающая расстояния в графе G с длинами ребер ℓ (если $x = y$, то $\mu(xy) = 0$, и если x и y принадлежат разным компонентам связности в G, то $\mu(xy) = \infty$). Тогда $\mu(st) \geq 1$ для любого $st \in \mathcal{U}$, и из теоремы о дополняющей нежесткости линейного программирования, примененной к $\mathcal{P}(c)$, $\mathcal{P}^*(c)$, следует

$$(*) \qquad e \in E,\ \xi^f(e) < c(e) \Rightarrow \ell(e) = 0;$$

$$(**) \qquad L \in \mathcal{L}^+(f) \Rightarrow \ell(EL) = 1 (\Rightarrow \mu(st) = 1, \text{ где } s \text{ и } t \text{ концы } L).$$

Для $A \in \mathcal{A}$ и $x \in V$ определим величины

$$r_A(x) = \min\{\mu(sx) : s \in A\};$$

$$d_A(x) = \min\{\mu(sx) + \mu(xt) : s, t \in A,\ s \nsim t\}.$$

Положим

$$X^*_A = Y_A = \{x \in V : d_A(x) < \tfrac{1}{2}\} \qquad \text{для } A \in \mathcal{A}_1;$$

$$Y_A = \{x \in V : d_A(x) \leq \tfrac{1}{2}\},\ R_A = \{x \in V : r_A(x) = 0\},$$

$$W_A = R_A \cap \{x \in V : d_B(x) \geq \tfrac{1}{2}\ \ \forall B \in \mathcal{A} - \{A\}\},\ X^*_A = Y_A \cup W_A \qquad \text{для } A \in \mathcal{A}_2;$$

и $\mathcal{X}^* = \{X^*_A : A \in \mathcal{A}\}$. Наша цель – показать, что $\mathcal{X}^*$ – правильное семейство, каждое множество которого насыщено и согласовано с f, откуда, ввиду (2.2), будет следовать $c(\mathcal{X}^*) = v(c)$, что и докажет теорему. Для полюсов s и t (не обязательно различных) положим $\tau(st) = 1$, если $st \in \mathcal{U}$, и $\tau(st) = 0$ – иначе. Для полюсов s, t, p, q (не обязательно различных) положим

$$\tau(s,t,p,q) = \max\{\tau(st) + \tau(pq), \tau(sp) + \tau(tq), \tau(sq) + \tau(tp)\}.$$

(2.4). (i) Если $\tau(s,t,p,q) = 0$, то $s,t,p,q \in A$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$. (ii) Если $\tau(s,t,p,q) = 1$, то найдется $A \in \mathcal{A}$, содержащее ровно три полюса из s,t,p,q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) следует из того, что никакие два полюса из s,t,p,q не образуют ребра в H (иначе было бы $\tau(s,t,p,q) \geq 1$). (ii). Очевидно, каждая антиклика содержит не более трех элементов из s, t, p, q. С точностью до перестановки s,t,p,q возможны два случая: 1) $\tau(st), \tau(sp), \tau(tp) = 0$ и 2) $\tau(st), \tau(sp), \tau(sq) = 0$. В первом случае s, t, p принадлежит некоторой антиклике. Во втором – каждая пара из $\{s,t\}, \{s,p\}, \{s,q\}$ принадлежит некоторой антиклике, и из 3-незацепленности $\mathcal{A}$ следует, что некоторые две из них совпадают, откуда получаем требуемое. □

(2.5) Для любых $s,t,p,q \in T$ и $x \in V$ справедливо $\mu(sx) + \mu(tx) + \mu(px) + \mu(qx) \geq \tau(s,t,p,q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любых $s', t' \in T$ справедливо $\mu(s't') \geq \tau(s't')$. Пусть для определенности $\tau(s,t,p,q) = \tau(st) + \tau(pq)$. Тогда требуемое неравенство следует из $\mu(sx) + \mu(xt) \geq \mu(st)$ и $\mu(px) + \mu(xq) \geq \mu(pq)$. □

(2.6) Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$ и $x \in V$. Тогда: (i) $d_A(x) + d_B(x) \geq 2$, если $A \cap B = \varnothing$; (ii) $d_A(x) + d_B(x) \geq 1$, если A и B смежны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s, t \in A$ и $p, q \in B$ таковы, что $s \nsim t$, $p \nsim q$, $d_A(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$ и $d_B(x) = \mu(px) + \mu(xq)$. Ввиду (2.5), $d_A(x) + d_B(x) \geq \tau(s,t,p,q)$. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Если $\tau(s,t,p,q) \leq 1$, то ввиду (2.4), найдется антиклика A', содержащая по крайней мере три элемента из s, t, p, q, скажем $s, t, p \in A'$.

Тогда $A \neq A'$ и $s, t \in A \cap A'$, вопреки $s \nsim t$. Пусть теперь A и B смежны. Из $s \nsim t$ и $p \nsim q$ следует, что не существует антиклики A', содержащей все s, t, p, q. Отсюда, ввиду (2.4), $\tau(s,t,p,q) \geq 1$. □

(2.7) Пусть A и B – две различные антиклики и $x \in V$. Тогда: (i) если $r_A(x) + d_B(x) < 1$, то A и B смежны и из $p \in A$, $\mu(px) = r_A(x)$ следует $p \in A \cap B$; (ii) если $A \cap B = \varnothing$ и $r_A(x) + r_B(x) < 1$, то существует антиклика C, смежная как A, так и B и такая, что $d_C(x) \leq r_A(x) + r_B(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Пусть $s, t \in B$, $s \nsim t$ и $d_B(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$. Поскольку $\mu(sp) \leq r_A(x) + d_B(x) < 1$, то $sp \notin \mathcal{U}$. Аналогично, $tp \notin \mathcal{U}$. Пусть B' – антиклика, содержащая s, t, p. Из $s \nsim t$ и 3-незацепленности $\mathcal{A}$ следует $B' = B$. (ii). Пусть $s \in A$, $t \in B$, $r_A(x) = \mu(sx)$, $r_B(x) = \mu(tx)$. Тогда $\mu(st) < 1$ и, следовательно, $st \notin \mathcal{U}$; пусть C – антиклика, содержащая s и t. Из 3-незацепленности $\mathcal{A}$ следует, что C определяется единственным образом, откуда $s \nsim t$ и $d_C(x) \leq \mu(sx) + \mu(xt)$. □

Из (2.6) следует $Y_A \cap Y_B = \varnothing$ для любых различных $A, B \in \mathcal{A}$. Далее, пусть $A \in \mathcal{A}_2$ и $x \in R_A$. Из определения W_A следует, что для произвольного $B' \in \mathcal{A}_1$ не может быть одновременно $x \in W_A$ и $x \in Y_{B'}$, а из (2.7) (i) следует, что $d_{B''}(x) \geq 1$ для любого $B'' \in \mathcal{A}_2 - \{A\}$. Следовательно, $W_A \cap Y_B = \varnothing$ для любого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$. Далее, если $r_B(x) = 0$ для некоторого $B \in \mathcal{A}_2 - \{A\}$, то, согласно (2.7) (ii), найдется антиклика $C \in \mathcal{A}$, для которой $d_C(x) = 0$, откуда $x \notin W_A, W_B$. Таким образом, $\mathcal{X}^*$ состоит из попарно не пересекающихся множеств. Рассмотрим произвольный полюс s. Если s – 1-полюс и $s \in A$, то $s \nsim s$ и $d_A(s) = \mu(ss) + \mu(ss) = 0$, поэтому $s \in Y_A$. Пусть s – 2-полюс и $s \in A \in \mathcal{A}_2$. Тогда $r_A(s) = \mu(ss) = 0$, и если $s \notin W_A$, то $d_B(s) < \frac{1}{2}$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, откуда, учитывая (2.7) (i), получаем $s \in A \cap B$. Следовательно, всякий полюс s принадлежит ровно одному множеству $X^*_C \in \mathcal{X}^*$, и при этом $s \in C$. Таким образом, $\mathcal{X}^*$ – правильное семейство.

Осталось доказать, что каждое множество в $\mathcal{X}^*$ насыщено и согласовано с f. Воспользуемся соотношениями (*) и (**). Следующее утверждение тривиально.

(2.8) Пусть $x, y \in V$, $\mu(xy) = 0$ и $A \in \mathcal{A}$. Тогда: (i) если $x \in Y_A$, то $y \in Y_A$; (ii) если $x \in W_A$, то $y \in W_A$.

Для $A \in \mathcal{A}$ и $xy \in \partial X^*_A$ из (2.8) получаем $\mu(xy) > 0$ и, следовательно, $\ell(xy) > 0$, откуда, ввиду (*), ребро xy насыщено f.

Таким образом, X_A^* насыщено f. Для доказательства согласованности X_A^* с f рассмотрим произвольную pq – цепь $L \in \mathcal{L}^+(f)$ и предположим, что имеется вершина $x \in VL$, содержащаяся в X_A^*. Пусть, для определенности, $q \notin A$, и пусть L' и L'' – отрезки L от p до x и от x до q, соответственно. Согласно (**) мы имеем $\ell(EL)=\ell(EL')+\ell(EL'')=\mu(pq)=1$. Надо показать, что $VL' \subseteq X_A^*$.

1. Предположим, что $x \in Y_A$. Возьмем $s,t \in A$, $s \not\sim t$, для которых $d_A(x)=\mu(sx)+\mu(xt)$. Тогда $\mu(sx)+\mu(tx)+\mu(px)+\mu(qx) \le 1\frac{1}{2}$, откуда, ввиду (2.5) и (2.4), $\tau(s,t,p,q)=1$ и найдется антиклика B, содержащая элементы s, t и $p' \in \{p,q\}$. Очевидно, $B=A$ (иначе было бы $s\sim t$) и, следовательно, $p'=p$. Согласно (2.3) (i) $\{sq,tq\}\cap \mathcal{U} \ne \emptyset$. Если для некоторого элемента $s' \in \{s,t\}$ имеет место $s'\sim p$, то $s'q \in \mathcal{U}$ (ввиду (2.3) (ii)) и $t' \not\sim p$, где $\{s',t'\}=\{s,t\}$. Таким образом, мы можем считать, что $sq \in \mathcal{U}$ и $t\not\sim p$. Из $\mu(sx)+\ell(EL'')\ge\mu(sq)\ge 1$ и $\ell(EL)=1$ получаем $\mu(tx)+\ell(EL')\le d_A(x)$, поэтому для любой вершины $y\in VL'$ справедливо $\mu(ty)+\mu(yp)\le d_A(x)$ и, следовательно, $y \in Y_A$.

2. Предположим теперь, что $A\in \mathcal{A}_2$ и $x \in W_A$. Выберем $s\in A$, для которого $\mu(sx)=\tau_A(x)=0$. Тогда $\mu(sx)+\ell(EL')+\ell(EL'')=1$. Если $sq\in\mathcal{U}$, то из этого равенства и $\mu(sq)\ge1$ следует $\mu(sx)+\ell(EL')=0$, откуда для произвольного $y\in VL'$ имеем $\mu(sy)=0$ и, ввиду (2.8), $y\in W_A$. Допустим теперь, что $sq\notin\mathcal{U}$, и пусть B – антиклика, содержащая s и q; очевидно, $B\ne A$ и $s\not\sim q$. Поскольку $x\in W_A$, то $d_B(x)\ge\frac12$ и, следовательно, $\ell(EL'')+\mu(sx)\ge\frac12$, откуда $\mu(sp)\le\mu(sx)+\ell(EL')\le\frac12$. Таким образом, $sp\notin\mathcal{U}$, что, ввиду 3-незацепленности $\mathcal{A}$, влечет $p\in A$. Но из $pq\in\mathcal{U}$ следует $s\not\sim p$ (иначе было бы $sq\in\mathcal{U}$, вопреки $s,q\in B$), и для произвольного $y\in VL'$ мы получаем $d_A(y)\le\mu(sy)+\mu(yp)\le\frac12$, т.е. $y\in Y_A$.

Этим завершается доказательство теоремы 2.1.

(2.9) *С л е д с т в и е.* Если функция c внутренне четная, то для любого полуправильного семейства $\mathcal{X}$ величина $c(\mathcal{X})$ целая (и, следовательно, величина $v(c)$ тоже целая).

Действительно, пусть $A\in\mathcal{A}$ и $\mathcal{X}'$ – правильное семейство, состоящее из множеств $X'_A=X_A\cup(V-T)$ и $X'_B=X_B\cap T$ $(B\in\mathcal{A}-\{A\})$. Из внутренней четности c следует $c(\partial X'_C)\equiv c(\partial X_C) \pmod 2$ для любого $C\in\mathcal{A}$ (учитывая $X'_C\cap T=X_C\cap T$), поэтому величина $c(\mathcal{X}')-c(\mathcal{X})$ – целая. Поскольку $\mathcal{X}'$ является разбиением

множества V, каждое ребро $e\in E$ встречается в четном числе разрезов $\partial X'_C$, $C\in\mathcal{A}$, откуда получаем, что $c(\mathcal{X}')$ – целое.

3. Декомпозиция сети

В этом разделе завершается доказательство теоремы 1. Нам будет удобно считать, что граф G полный, т.е. $xy\in E$ для любых различных $x,y\in V$ (если в исходном графе G отсутствует какое-либо ребро xy, добавим его, положив $c(xy)=0$). Пусть c – внутренне четная функция.

Полуправильное семейство $\mathcal{X}$, для которого $c(\mathcal{X})=v(c)$, назовем c *– м и н и м а л ь н ы м*. Обозначим через $\mathcal{M}(c)$ множество всех c –минимальных *п р а в и л ь н ы х* семейств. Доказательство теоремы проводится по индукции. А именно, будем предполагать, что при фиксированных G и H теорема верна для всех внутренне четных функций c' таких, что либо $|\mathcal{M}(c')|>|\mathcal{M}(c)|$, либо $|\mathcal{M}(c')|=|\mathcal{M}(c)|$ и $c'(E)<c(E)$. Теорема очевидна при $c=0$ (заметим, что в этом случае всякое правильное семейство является c –минимальным, т.е. $|\mathcal{M}(c)|$ максимально возможное).

Пусть f, как и прежде, обозначает некоторое оптимальное решение задачи $\mathcal{P}(G,c,\mathcal{U})$. Тройку вершин xyz, в которой $y\ne x,z$, а x и z могут совпадать, назовем *в и л к о й* функции c, если $c(xy)>0$ и $c(yz)>0$. Для вилки xyz определим функцию $\theta=\theta_{xyz}$ на E как: 1) $\theta(xy)=2$ и $\theta(e)=0$ $(e\in E-\{xy\})$, если $x=z$, и 2) $\theta(xy)=\theta(yz)=1$, $\theta(xz)=-1$ и $\theta(e)=0$ $(e\in E-\{xy,yz,xz\})$, если $x\ne z$. Вилку xyz назовем *с у щ е с т в е н н о й* (относительно f), если $x\ne z$ и в множестве $\mathcal{L}^+(f)$ найдется цепь, содержащая оба ребра xy и yz.

(3.1) Пусть xyz – вилка и $c'=c-\theta_{xyz}$. Тогда: (i) функция c' – внутренне четная; (ii) $v(c)\ge v(c')\ge v(c)-2$; (iii) если $v(c')=v(c)$, то $\mathcal{M}(c')\supseteq\mathcal{M}(c)$; (iv) если вилка xyz – существенная и $\mathcal{X}=\{X_A: A\in\mathcal{A}\}$ – такое правильное семейство, что $c'(\mathcal{X})<v(c)$, то $c'(\mathcal{X})=v(c)-1$, $c(\mathcal{X})=v(c)+1$, и имеются $X_A,X_B\in\mathcal{X}$, для которых $y\notin X_A\ni x,z$ и $x,z\notin X_B\ni y$ (откуда, в частности, следует, что либо $v(c')=v(c)$ либо $v(c')=v(c)-1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) очевидно. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное правильное семейство. Согласно (2.9), величины $c(\mathcal{X})$ и $c'(\mathcal{X})$ – целые. Для всякого $X_C\in\mathcal{X}$ мы имеем $c'(\partial X_C)=c(\partial X_C)-2$, если $xy,yz\in\partial X_C$, и $c'(\partial X_C)=c(\partial X_C)$ – в остальных случаях. Поскольку множества в $\mathcal{X}$ попарно не пересекаются, то в $\mathcal{X}$ имеется не более двух множеств X_C, для которых $xy, yz \in \partial X_C$, следовательно, $c(\mathcal{X}) \geq c'(\mathcal{X}) \geq c(\mathcal{X}) - 2$. Отсюда получаем (ii) и (iii). Пусть теперь xyz и $\mathcal{X}$ определены как в (iv), и пусть $X_C \in \mathcal{X}$ – такое множество, что $xy, yz \in \partial X_C$. Тогда X_C не согласовано с f и, ввиду (2.2), $\mathcal{X}$ не является c-минимальным. Отсюда легко получаем (iv). □

Пусть $K(f)$ обозначает множество существенных вилок для f. Если $K(f) = \emptyset$ (т.е. $|EL| = 1$ для всех $L \in \mathcal{L}^+(f)$), то, очевидно, мультипоток f – целочисленный. Таким образом, мы можем далее считать, что $K(f) \neq \emptyset$. Вилку xyz назовем *отделяемой*, если $v(c') = v(c)$, где $c' = c - \theta_{xyz}$. Наша цель состоит в том, чтобы доказать существование отделяемой вилки. В предположении, что этот факт нами доказан, доказательство теоремы I завершается следующим образом. Пусть xyz – отделяемая вилка и $c' = c - \theta_{xyz}$. Поскольку $c'(E) < c(E)$ и $\mathcal{M}(c') \supseteq \mathcal{M}(c)$ (ввиду (3.I) (iii)), то по индукции задача $\mathcal{P}(c')$ имеет целочисленное оптимальное решение f'. Если $x = z$ либо $x \neq z$ и $\xi^{f'}(xz) \leq c(xy)$, то, очевидно, f' – оптимальное решение для $\mathcal{P}(c)$. Если $x \neq z$ и $\xi^{f'}(xz) = c(xz) + 1 (= c'(xz))$, положим $f^*(L) = f'(L) - 1$, $f^*(L') = f'(L') + 1$ и $f^*(L'') = f'(L'')$ $(L'' \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, где L – некоторая цепь в $\mathcal{L}^+(f')$, содержащая ребро xz и L' – цепь в $\mathcal{L}$, для которой $EL' \subseteq (EL - \{xz\}) \cup \{xy, yz\}$. Очевидно, мультипоток f^* – c-допустимый, и $1 \cdot f^* = 1 \cdot f' = v(c)$, таким образом, f^* – оптимальное целочисленное решение задачи $\mathcal{P}(c)$.

Приступим к доказательству существования отделяемой вилки. Мы можем далее считать, что никакая существенная вилка не является отделяемой. Надо показать, что тогда обязательно найдется отделяемая несущественная вилка. Выберем некоторую существенную вилку xyz и положим $c' = c - \theta_{xyz}$, $c' = c - \frac{1}{2}\theta_{xyz}$ и $\tilde{c} = 2c''$. Для любого правильного семейства $\mathcal{X}$ справедливо $c''(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}(c(\mathcal{X}) + c'(\mathcal{X}))$, откуда, ввиду (3.I) (iv), мы получаем следующее: 1) $v(c'') = v(c)$; 2) если $c(\mathcal{X}) = v(c)$, то $c''(\mathcal{X}) = v(c'')$; 3) если $c'(\mathcal{X}) = v(c') (= v(c) - 1)$, то $c(\mathcal{X}) > v(c)$ и $c''(\mathcal{X}) = v(c'')$. Таким образом, $\mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c'') \supset \mathcal{M}(c)$. Так как функция $\tilde{c}$, очевидно, внутренне четная, то по предположению индукции задача $\mathcal{P}(\tilde{c})$ имеет целочисленное оптимальное решение $\tilde{f}$. Поскольку $\tilde{c} = 2c - \theta_{xyz}$, и для функции $2c$ вилка xyz является отделяемой, то указанным выше способом мультипоток $\tilde{f}$ можно перестро-

ить в $2c$-допустимый целочисленный мультипоток $\tilde{f}^*$ с $1 \cdot \tilde{f}^* = 1 \cdot \tilde{f}$. Таким образом, задача $\mathcal{P}(2c)$ имеет целочисленное оптимальное решение, и, следовательно, задача $\mathcal{P}(c)$ имеет *полуцелочисленное* оптимальное решение.

Итак, мы можем считать, что f принимает значения в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$. Будем предполагать также, что среди всех полуцелочисленных оптимальных решений задачи $\mathcal{P}(c)$ мультипоток f имеет минимальную величину $\xi^f(E)$. Для существенной вилки xyz правильное семейство $\mathcal{X}$, указанное в (3.I) (iv), будем называть *критическим*, а X_A и X_B – соответственно, *внешним* и *внутренним* множествами (относительно xyz).

(3.2) Пусть xyz – существенная вилка, $\mathcal{X}$ – правильное семейство, критическое для xyz, $X_A, X_B \in \mathcal{X}$ – соответственно, внешнее и внутреннее множества и $L \in \mathcal{L}^+(f)$ – цепь, содержащая ребра xy и yz. Тогда: (i) каждое множество $X_C \in \mathcal{X}$ насыщено f; (ii) каждое множество $X_C \in \mathcal{X} - \{X_A, X_B\}$ согласовано с f; (iii) множества X_A и X_B согласованы с каждой цепью в $\mathcal{L}^+(f) - \{L\}$; (iv) $|EL \cap \partial X_A| = 3$; (v) $f(L) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Положим $c' = c - \frac{1}{2}\theta_{xyz}$ и определим мультипоток f' как $f'(L) = f(L) - \frac{1}{2}$, $f'(L') = f(L') + \frac{1}{2}$, $f'(L'') = f(L'')$ $(L'' \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, где L' – цепь в $\mathcal{L}$, для которой $EL' = (EL - \{xy, yz\}) \cup \{xz\}$. Тогда $v(c) = v(c') = c'(\mathcal{X})$ и f' – оптимальное решение для $\mathcal{P}(c')$. Теперь (i), (ii), (iii) и (v) легко следуют из (2.2), примененного к c', f' и $\mathcal{X}$. Наконец, $|EL' \cap \partial X_A| = 1$ (так как $VL' \cap X_A \neq \emptyset$), откуда $|EL \cap \partial X_A| = |EL' \cap \partial X_A| + 2 = 3$. □

Пусть $\tilde{V}$ – множество вершин $y \in V$, для которых имеется хотя бы одна существенная вилка xyz. Рассмотрим некоторую вершину $y \in \tilde{V}$ и существенную вилку xyz. Из (3.2) (iii) следует, что в $\mathcal{L}^+(f)$ имеется единственная цепь L, содержащая оба ребра xy и yz. Поскольку $f(L) = \frac{1}{2}$, и ребро xy насыщено f, то верно по крайней мере одно из двух: 1) найдется существенная вилка $x'yz$, $x' \neq z$ 2) ребро xy принадлежит цепи $L' \in \mathcal{L}^+(f)$ с одним концом в y (и, в частности, y является полюсом). Отсюда нетрудно заключить, что должна иметь место хотя бы одна из двух ситуаций:

(c1) в G есть вершина y и различные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_k = x_0$ $(k \geq 3)$ такие, что для каждого $i = 1, \ldots, k$ $x_i y x_{i+1}$ – существенная вилка;

(c2) $\tilde{V} \subseteq T$ и для некоторых $s \in T$ и $x, z \in \tilde{V}$ имеется цепь

$\in \mathscr{L}^+(f)$, содержащая ребра xs и sz, и st – цепь $L' \in \mathscr{L}^+(f)$ содержащая ребро sx.

Покажем, что в действительности ситуация (с2) невозможна. Воспользуемся следующим утверждением.

(3.3) Пусть $L \in \mathscr{L}^+(f)$ – pq – цепь, и $T' = T \cap (VL - \{p, q\}) \neq \varnothing$. Тогда $T' \subseteq A \cap B$ для некоторых различных $A, B \in \mathscr{A}$.

Доказательство. Из минимальности величины $\xi^f(E)$ следует, что $p'q' \notin \mathcal{U}$ для любой пары $\{p', q'\} \subset VL \cap T$, отличной от $\{p, q\}$ (иначе можно было бы "укоротить" цепь L). Выберем $p' \in T'$, и пусть A – антиклика, содержащая p и p', а B – антиклика, содержащая p' и q. Пусть $q' \in T' - \{p'\}$. Из $p'q' \notin \mathcal{U}$ и (2.3) (iii) следует $q' \in A \cup B$. Если бы было $q' \notin A$, то, ввиду $pq' \notin \mathcal{U}$, нашлась бы антиклика $C \neq A, B$, содержащая p и q', что противоречило бы 3-незацепленности $\mathscr{A}$. Отсюда $T' \subseteq A \cap B$. □

Рассмотрим s, x, z, L, L', указанные в (с2). Пусть L имеет концы p и q, и пусть X_A – внешнее множество правильного семейства, критического для xsz. Заметим, что из $\widehat{V} \subseteq T$ следует $x, z \in T$. Поскольку $|EL| \geq |EL \cap \partial X_A| = 3$, то хотя бы один из полюсов x и z, скажем x, отличен от p и q. Из (3.3) и $x \in X_A \cap T \subseteq A$ мы получаем $s \in A$. Пусть t – конец цепи L', отличный от s. Поскольку X_A согласовано с L' (из (3.2) (iii)) и $s \notin X_A$, то $t \in X_A$. Таким образом, L' имеет оба конца в антиклике A, что невозможно.

Приступим теперь к рассмотрению ситуации (с1), и пусть $y, x_1, \ldots, x_k$ – указанные вершины. Мы покажем, что вилка вида $x_i y x_{i+2}$ является отделяемой. Пусть $\mathfrak{X}^i = \{X^i_B : B \in \mathscr{A}\}$ обозначает правильное семейство, критическое для $x_i y x_{i+1}$, $X^i_{A(i)} \in \mathfrak{X}^i$ – внешнее множество (относительно $x_i y x_{i+1}$), $T^i = T \cap X^i_{A(i)}$ и $L^i \in \mathscr{L}^+(f)$ – цепь, содержащая ребра $x_i y$ и $y x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$. Далее индексы берутся по модулю k.

(3.4) Для любого $i = 1, \ldots, k$ либо $A(i) = A(i+1)$, либо $A(i)$ смежно $A(i+1)$.

Доказательство. Предположим, что $A(i) \cap A(i+1) = \varnothing$. Тогда $T^i \cap T^{i+1} = \varnothing$ и, следовательно, $\mathcal{Y} = (\mathfrak{X}^i - \{X\}) \cup \{X - Y\}$ и $\mathcal{Y}' = (\mathfrak{X}^{i+1} - \{Y\}) \cup \{Y - X\}$, где $X = X^i_{A(i)}$ и $Y = X^{i+1}_{A(i+1)}$, – правильные семейства. Поскольку внутреннее (относительно $x_i y x_{i+1}$) множество в $\mathfrak{X}^i$ не согласовано с f, и это множество присутствует в $\mathcal{Y}$, то $c(\mathcal{Y}) \geq v(c) + 1$. Аналогично, $c(\mathcal{Y}') \geq v(c) + 1$. Таким образом, $c(\mathcal{Y}) + c(\mathcal{Y}') \geq c(\mathfrak{X}^i) + c(\mathfrak{X}^{i+1})$. С другой стороны,

$x_{i+1} y \in \partial X, \partial Y$ и $x_{i+1} y \notin \partial(X - Y), \partial(Y - X)$, и, следовательно, для X и Y выполняется строгое субмодулярное неравенство $c(\partial X) + c(\partial Y) > c(\partial(X - Y)) + c(\partial(Y - X))$, откуда получаем $c(\mathfrak{X}^i) + c(\mathfrak{X}^{i+1}) > c(\mathcal{Y}) + c(\mathcal{Y}')$. Противоречие. □

Пусть $L[z\, z']$ обозначает отрезок цепи L от z до z', где $z, z' \in VL$. Для $i = 1, \ldots, k$ пусть s_i обозначает тот конец цепи L^i, для которого x_i содержится в $L^i[s_i y]$, и пусть t_i – другой конец L^i. Из (3.2) (iii), (iv) легко получаем следующее утверждение.

(3.5) Для любого $j = 1, \ldots, k$ справедливо: (i) $t_{j-1}, s_{j+1} \in T^j$, (ii) ровно один из полюсов s_j и t_j принадлежит T_j. □

(3.6) Для любого $i = 1, \ldots, k$ по крайней мере один из полюсов s_{i+1} и t_i принадлежит $T^i \cap T^{i+1}$.

Доказательство. Предположим противное. Из (3.5) (i) (при $j = i+1$ и $j = i$) имеем $t_i \in T^{i+1}$ и $s_{i+1} \in T^i$. Тогда $t_i \notin T^i$ и $s_{i+1} \notin T^{i+1}$, откуда, ввиду (3.5) (ii), $s_i \in T^i$ и $t_{i+1} \in T^{i+1}$. Таким образом, $s_i, s_{i+1} \in A(i)$, $t_i, t_{i+1} \in A(i+1)$, что влечет $A(i) \neq A(i+1)$. Следовательно, $A(i)$ смежно $A(i+1)$ (ввиду (3.4)). Кроме того, из (2.3) (iii) мы получаем $s_i t_{i+1}$, $s_{i+1} t_i \in \mathcal{U}$. Пусть L и L' обозначают, соответственно, $s_i t_{i+1}$ – цепь и $s_{i+1} t_i$ – цепь, для которых $EL \subseteq EL^i[s_i y] \cup EL^{i+1}[y t_{i+1}]$ и $EL' \subseteq EL^{i+1}[s_{i+1} x_{i+1}] \cup EL^i[x_{i+1} t_i]$. Определим мультипоток f' как $f'(L) = f(L) + \frac{1}{2}$, $f'(L') = f(L') + \frac{1}{2}$, $f'(L^i) = f'(L^{i+1}) = 0$ и $f'(L'') = f(L'')$ для остальных цепей L'' в $\mathscr{L}$. Очевидно, $1 \cdot f' = 1 \cdot f = v(c)$ и $\xi^{f'}(e) \leq \xi^f(e)$ для каждого $e \in E$. Но $\xi^{f'}(x_{i+1} y) < \xi^f(x_{i+1} y)$ (поскольку цепи L и L' не содержат ребро $x_{i+1} y$), что противоречит минимальности $\xi^f(E)$. □

Пусть, для определенности, $s_1 \in T^1$. Тогда из (3.5) и (3.6) следует, что $s_i \in T^{i-1} \cap T^i$ и $t_i \in T^{i+1} - T^i$, $i = 1, \ldots, k$ (рис. 1). Отсюда и из (3.4) мы получаем, что для любого i справедливо:

(1) $s_i \in A(i-1) \cap A(i)$, $t_i \in A(i+1) - A(i)$;
(2) $A(i)$ смежно $A(i+1)$ (ввиду (3.4) и $s_i \in T^i$, $t_i \in T^{i+1}$);
(3) $A(i) \neq A(i+2)$ (поскольку $s_{i+1} \in T^i$ и $t_{i+1} \in T^{i+2}$);
(4) $A(i) \neq A(i+3)$ (иначе $A(i), A(i+1), A(i+2)$ были бы попарно смежными).

Из (4), в частности, следует, что $k \geq 4$. Кроме того, из (1), (3) и 3-незацепленности $\mathscr{A}$ имеем

(5) $A(i) \cap A(i+2) = \varnothing$.

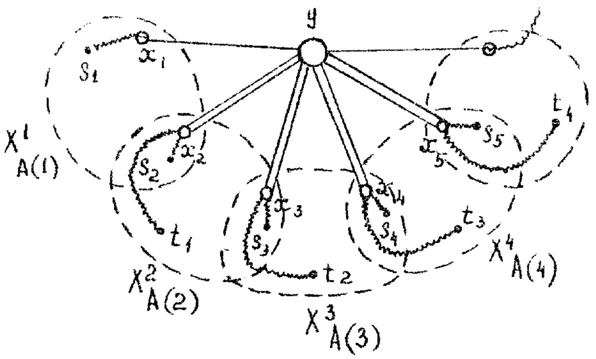

Рис. I

(3.7) Вилка $x_2 y x_4$ является отделяемой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I) и (5) следует $s_1 \notin A(2), A(3)$ откуда, ввиду (2.3) (iii), $s_1 s_3 \in \mathcal{U}$; пусть P_1 – $s_1 s_3$ –цепь, для которой $EP_1 \subseteq EL^1[s_1 y] \cup EL^3[y\, s_3]$. Аналогично, $s_2 s_4 \in \mathcal{U}$. Рассмотрим два случая.

I) $t_1 t_3 \in \mathcal{U}$. Образуем $s_2 s_4$ – цепь P_2 и $t_1 t_3$ – цепь P_3 такие, что $EP_2 \subseteq EL^2[s_2 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^4[x_4 s_4]$ и $EP_3 \subseteq EL^1[t_1 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^3[x_4 t_3]$. 2) $t_1 t_3 \notin U$. Пусть B – антиклика, содержащая t_1 и t_3. Из (I) и (5) следует, что B отлично от $A(1)$, $A(2), A(3)$ и $A(4)$. Тогда t_1 и t_3 – 2-полюсы, $t_3 \notin A(1), A(2)$, $t_1 \notin A(3), A(4)$, и из (2.3) (iii) мы получаем $s_2 t_3 \in \mathcal{U}$ и $t_1 s_4 \in \mathcal{U}$. Образуем $s_2 t_3$ – цепь P_2 и $t_1 s_4$ – цепь P_3 такие, что $EP_2 \subseteq EL^2[s_2 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^3[x_4 t_3]$ и $EP_3 \subseteq EL^1[t_1 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^4[x_4 s_4]$. В каждом из двух случаев определим мультипоток f' как $f'(P_j) = f(P_j) + \frac{1}{2}$ $(j = 1,2,3)$, $f'(L^m) = f(L^m) - \frac{1}{2}\ (=0)\ (m = 1,2,3,4)$ и $f'(L) = f(L)$ для остальных L в $\mathcal{L}$. Очевидно, f' является c' – допустимым, где $c' = c - \theta_{x_2 y x_4}$, и $v(c') \geq 1 \cdot f' = 1 \cdot f - \frac{1}{2} = v(c) - \frac{1}{2}$. Но величины $v(c)$ и $v(c')$ – целые, поэтому $v(c') = v(c)$. Следовательно, вилка $x_2 y x_4$ – отделяемая. □

Этим заканчивается доказательство теоремы I.

4. Алгоритм

В основе алгоритма лежит та же идея декомпозиции сети (отделение вилок), что и в доказательстве теоремы I. Для определения

максимального возможного "веса", с которым может быть отделена очередная вилка, используется процедура построения c – минимального семейства $\mathcal{X}$ (для текущего c). Следует заметить, что метод построения такого семейства, данный в разделе 2, является недостаточно эффективным, так как он предполагает решение двойственной задачи $\mathcal{P}^*(c)$. Покажем, что построение c – минимального семейства можно свести к отысканию обычного минимального разреза в некоторой расширенной сети.

Пусть $c: E \to \mathbb{R}_+$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ возьмем копию $G_A = (V_A, E_A)$ графа G ; пусть x_A обозначает копию вершины $x \in V$ в графе G_A . Склеим графы G_A, $A \in \mathcal{A}$ между собой, производя следующие отождествления вершин и ребер для каждых двух смежных антиклик $A, B \in \mathcal{A}$: отождествим вершины x_A и x_B , если $x \in A \cap B$; отождествим ребра $x_A y_A$ и $x_B y_B$, если $x, y \in A \cap B$ и $xy \in E$. Полученный граф обозначим $\mathcal{G}'$. Сохраним обозначение G_A за соответствующим подграфом графа $\mathcal{G}'$. Пусть $\widetilde{A}$ обозначает множество I-полюсов в антиклике A , т.е. $\widetilde{A} = A - \cup(B : B \in \mathcal{A} - \{A\})$. Образуем граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, добавив к $\mathcal{G}'$ вершины s° ("источник"), t° ("сток") и следующие ребра: I) $s^\circ s_A$, где $s \in \widetilde{A}, A \in \mathcal{A}_1$; 2) $s^\circ t_A$, где $t \in T - A$, $A \in \mathcal{A}_2$; 3) $t^\circ t_A$, где $t \in T - A, A \in \mathcal{A}_1$; 4) $t^\circ s_A$, где $s \in \widetilde{A}, A \in \mathcal{A}_2$ (на рис. 2 изображен пример графа G , совокупности $\mathcal{A}$ и соответствующего графа $\mathcal{G}$; здесь $\mathcal{A}_1 = \{A = \{s,t\},\ C = \{p,q,r\}\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{B = \{t,p,q\}\}$.

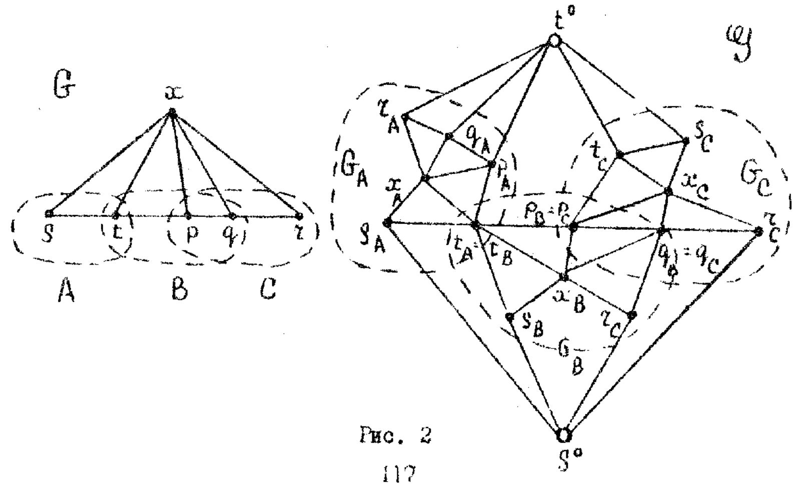

Рис. 2

Для каждого $A \in \mathcal{A}$ обозначим через φ_A вложение G в $\mathcal{G}$, при котором G естественно отображается в подграф G_A. Зададим пропускные способности $d = d^c$ ребер графа $\mathcal{G}$ следующим образом: пусть $xy \in E$, $A \in \mathcal{A}$ и $e = \varphi_A(xy) \in \mathcal{E}$; тогда, если $x, y \in A \cap B$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, то полагаем $d(e) = 2c(xy)$, в остальных случаях полагаем $d(e) = c(xy)$; для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$, инцидентного s° или t° полагаем $d(e) = \infty$ (легко видеть, что это определение корректно).

Разрез ∂Z графа $\mathcal{G}$ назовем (s°, t°)-разрезом, если $s^\circ \in Z \subset \mathcal{V}$ и $t^\circ \notin Z$. Пусть $\mathcal{Q}$ обозначает множество всех $Z \subset \mathcal{V}$, для которых ∂Z – (s°, t°)-разрез, не содержащий ребер, инцидентных s° или t°. Для $Z \in \mathcal{Q}$ определим семейство $\omega(Z) = \{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ подмножеств в V как $X_A = \varphi_A^{-1}(Z \cap V_A)$ при $A \in \mathcal{A}_1$ и $X_A = \varphi_A^{-1}(V_A - Z)$ при $A \in \mathcal{A}_2$. Из конструкции графа $\mathcal{G}$ непосредственно вытекает следующее утверждение (аккуратная проверка оставляется читателю).

(4.I) Отображение ω является биекцией между $\mathcal{Q}$ и множеством всех полуправильных семейств для G и $\mathcal{A}$. При этом для $Z \in \mathcal{Q}$ и $\mathcal{X} = \omega(Z)$ справедливо $d^c(\partial Z) = 2c(\mathcal{X})$.

Таким образом, нахождение c – минимального полуправильного семейства $\mathcal{X}$ и величины $v(c) = c(\mathcal{X})$ сводится к построению в графе $\mathcal{G}(s^\circ, t^\circ)$ – разреза ∂Z минимальной пропускной способности $d^c(\partial Z)$ (здесь учитывается тот факт, что если $s^\circ \in Z' \not\ni t^\circ$, но $Z' \notin \mathcal{Q}$, то разрез $\partial Z'$ содержит ребро бесконечной пропускной способности, и следовательно, не может быть минимальным (s°, t°)-разрезом). Заметим, что при желании из c-минимального полуправильного семейства $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ можно получить c-минимальное правильное семейство $\{X'_A : A \in \mathcal{A}\}$, положив $X'_A = X_A - \cup\{X_B : B \in \mathcal{A} - \{A\}\}$ (это простое утверждение мы оставляем читателю).

Приступим к описанию алгоритма решения задачи $\mathcal{P}(c)$. Будем различать два случая: I) c принимает значения из $\mathbb{R}_+$, 2) c – внутренне четная функция. В первом случае требуется построить оптимальный мультипоток $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}_+$, а во втором $f : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}_+$. Нам опять будет удобно считать, что граф G полный.

Вначале мы рассматриваем первый случай. Для функции $c' : E \to \mathbb{R}_+$ и тройки вершин xyz $(y \neq x, z)$ пусть $b(c', xyz)$ обозначает максимальное число $a \in \mathbb{R}_+$ такое, что $a \leq c'(xy), c'(yz)$ и $v(c' - a\theta_{xyz}) = v(c)$. Алгоритм состоит из о с н о в н о г о и з а к л ю ч и т е л ь н о г о этапов. В начале алгоритма вычисляется число $v(c)$. На основном этапе последовательно перебираются вершины в G, и для каждого $y \in V$ последовательно перебирают-

ся тройки xyz, $xz \in V - \{y\}$ (включая $x = z$), при этом порядок каждого перебора произволен. Обработка очередной вершины y составляет и т е р а ц и ю этапа, а обработка очередной тройки xyz – шаг итерации (таким образом, основной этап состоит из $|V|$ итераций, а каждая итерация – из $\frac{1}{2}|V|(|V|-1)$ (шагов). Обработка тройки xyz заключается в нахождении для текущей функции c числа $b = b(c, xyz)$ и преобразовании $c := c - b\,\theta_{xyz}$. В конце основного этапа для получившейся функции $\tilde{c}$ определяется оптимальное решение f задачи $\mathcal{P}(\tilde{c})$ как $f(L_{st}) = \tilde{c}(st)$ $(st \in U)$, где L_{st} – цепь с $EL_{st} = \{st\}$ (f считается продолженным нулем на остальные цепи в $\mathcal{L}$).

Число $b(c, xyz)$ находится следующим образом. Если $a_0 = \min\{c(xy), c(yz)\} = 0$, то полагаем $b(c, xyz) = 0$. Иначе полагаем $c_0 = c - a_0\theta_{xyz}$ и определяем $v(c_0)$ (для этого, в соответствии с (4.I), в сети $(\mathcal{G}, d^{c_0})$ надо найти величину q максимального потока из s° в t° и положить $v(c_0) = \frac{1}{2}q$). Если $v(c_0) = v(c)$, то полагаем $b(c, xyz) = a_0$. Если же $h_0 = v(c) - v(c_0) > 0$, то полагаем $a_1 = a_0 - \frac{1}{2}h_0$, $c_1 = c - a_1\theta_{xyz}$ и определяем $v(c_1)$. Искомым числом $b(c, xyz)$ в этом случае является $a_1 - h_1$, где $h_1 = v(c) - v(c_1)$.

Дадим обоснование основного этапа. Прежде всего заметим, что в процессе этапа величина $v(c)$ (для текущих c) не изменяется. Докажем правильность нахождения чисел $b(c, xyz)$ и тот факт, что для любой тройки xyz в результате основного этапа станет $b(\tilde{c}, xyz) = 0$. Для произвольных $y \in V$, $x, z \in V - \{y\}$, $a \in \mathbb{R}_+$ и правильного семейства $\mathcal{X}$ справедливо $c'(\mathcal{X}) = c(\mathcal{X}) - ak$, где $c' = c - a\theta_{xyz}$ и $k = k(\mathcal{X}, xyz)$ – число таких $X_A \in \mathcal{X}$, что $xy, yz \in X_A$; при этом k может быть равно только 0, I или 2. Таким образом,

(ж) $b(c, xyz) = \min\{c(xy), c(yz), \min\{\Delta(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \in \mathcal{K}\}\}$,

где $\mathcal{K}$ – множество всех правильных семейств, $\Delta(\mathcal{X}) = \Delta(\mathcal{X}, xyz, c)$ равно $(c(\mathcal{X}) - v(c))/k$ при $k = k(\mathcal{X}, xyz) > 0$ и равно ∞ при $k = 0$. Отсюда легко следует правильность нахождения чисел $b(c, xyz)$ в алгоритме. Далее, пусть на некотором шаге обрабатывается тройка xyz. Докажем, что если перед началом рассматриваемого шага для каждой ранее обработанной тройки $x'y'z'$ выполнялось $b(c, x'y'z') = 0$, то это свойство сохранится и после выполнения шага. Пусть c_1 и c_2 обозначают функцию c непосредственно до и после данного шага, и пусть $x'y'z'$ некоторая ранее обработанная