

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ
СИСТЕМ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Межведомственный тематический сборник научных трудов

Издание Омского
университета

Омск 1987

А.В. Карзанов
 Всесоюзный научно-исследовательский институт
 системных исследований АН СССР

ОДИН КЛАСС ЗАДАЧ О МАКСИМАЛЬНЫХ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ПОТОКАХ
 С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

В работе [1] утверждалось существование целочисленных оптимальных решений для одного весьма широкого класса задач о максимальных по суммарной мощности многопродуктовых потоках в неориентированных сетях и приводился набросок полномощного алгоритма, отыскивающего такие решения. В настоящей работе дается полное изложение этих результатов.

I. Введение

Под графом будем понимать конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер; ребро с концевыми вершинами x и y может быть обозначено xy . Цепь γ (xy - цепь γ) графа будем считать его подграф $L = (V_L, E_L)$, в котором множества вершин и ребер имеют вид $V_L = \{x = x_0, x_1, \dots, x_k = y\}$ и $E_L = \{e_i, x_{i-1}x_i : i = 1, \dots, k\}$; иногда цепь L будем обозначать также $x_0x_1\dots x_k$.

Мы будем иметь дело со следующими объектами: (основным) графом $G = (V, E)$, на ребрах которого заданы пропускные способности $c(e) \geq 0, e \in E$, и графом $H = (T, U)$ без изолированных вершин, для которого $T \subseteq V$. Пара (G, c) , граф H и множество его вершин T будут называться, соответственно, (потокковой) сетью и (потокковой) схемой и множеством полюсов сети.

Мы рассматриваем известную задачу о максимальном многопродуктовом потоке в сети (G, c) с потокковой схемой H . Нам удобно будет формулировать ее в виде задачи об упаковке цепей. Для $x, y \in V$ пусть $\mathcal{L}(G, xy)$ обозначает множество всех xy - цепей в G . Положим $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G, H) = U(\mathcal{L}(G, st) : st \in U)$. Функция $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (\mathbb{R}_+ - множество неотрицательных вещественных чисел) называется многопродуктовым потоком, или мультипотокком; мультипоток f называется c -допустимым, если выполняются ограничения по пропускным способностям

$$(*) \quad \sum_{L \in \mathcal{L}} f(L) \cdot e \in E_L \leq c(e), \quad e \in E.$$

Задача I. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G, c, H)$: найти c -допустимый мультипоток f , имеющий максимальную суммарную мощность

$$f \cdot j = \sum (f(L) : L \in \mathcal{L}).$$

Максимум величин $f \cdot j$ по всем s - допустимым j обозначается $v = v(G, s, H)$.

В теории дискретной оптимизации весьма актуальным является вопрос о том, какие массовые задачи имеют допустимые или оптимальные решения ограниченной дробности. В нашем случае это понятие конкретизируется следующим образом. Будем классифицировать задачи $\mathcal{P}(G, s, H)$ по виду схемы $H = (T, U)$. Скажем, что схема H (и массовая задача с этой схемой) разрешима в $\frac{1}{k} \mathbb{Z}_+$, где \mathbb{Z}_+ - множество неотрицательных целых чисел и $k \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}$, если для любого графа $G = (V, E)$, $V \ni T$, и функции $s : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ задача $\mathcal{P}(G, s, H)$ имеет оптимальное решение f такое, что $kf(L)$ - целое для всех $L \in \mathcal{L}(G, H)$, иначе говоря, задача $\mathcal{P}(G, ks, H)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Скажем, что схема H имеет ограниченную дробность, если H разрешима в $\frac{1}{k} \mathbb{Z}_+$ для некоторого натурального k .

Нам понадобятся также следующие понятия. Для $X \subseteq V$ множество ребер в G с одним концом в X и другим в $V - X$ обозначается $\partial X = \partial^G X$ и называется разрезом в G (мы допускаем $X = \emptyset$ или $X = V$). Функцию s назовем внутренней четной, если она целочисленная и величина $s(\partial X)$ четна для любого $X \subseteq V - T$ (для произвольных $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $E' \subseteq E$ через $g(E')$ обозначается величина $\sum (g(e) : e \in E')$). Скажем, что схема H разрешима в $\frac{1}{k} \mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности, если для любого графа $G = (V, E)$, $V \ni T$, и внутренней четной функции s на E задача $\mathcal{P}(G, ks, H)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Ясно, что если H разрешимо в $\frac{1}{k} \mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности, то оно разрешимо в $\frac{1}{2k} \mathbb{Z}_+$.

По классической теореме Форда и Фалкерсона H разрешимо в $\mathbb{Z}_+ = \frac{1}{1} \mathbb{Z}_+$ при $|U| = 1$ (в этом случае мы имеем обычную задачу о максимальном потоке в неориентированной сети); этот факт легко обобщается на произвольные полные двудольные графы H . Можно показать, что если H не является полным графом, то H не разрешимо в \mathbb{Z}_+ . Хорошо известна разрешимость в $\frac{1}{2} \mathbb{Z}_+$ схемы с двумя ребрами (теорема Хью о полуцелочисленных двухпродуктовых потоках [2]) и схемы, являющейся полным двудольным графом с произвольным числом вершин [3, 4, 5]. Это усилено, соответственно, в работах [6] и [4], где для указанных схем была доказана разрешимость в \mathbb{Z}_+ при условии внутренней четности. В [7] была

установлена разрешимость в $\frac{1}{2} \mathbb{Z}_+$ некоторых схем, представимых в виде объединения двух полных двудольных графов. Наконец, в [8] были найдены широкие, обобщающие все ранее известные классы схем, разрешимых в $\frac{1}{2} \mathbb{Z}_+$ и $\frac{1}{4} \mathbb{Z}_+$. Эти классы определяются в терминах семейства $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ всех антиклик графа H (антиклик графа называется максимальное по включению независимое, т. е. порождающее пустой подграф, подмножество его вершин).

О п р е д е л е н и я. Семейство антиклик \mathcal{A} называется двудольным, если существует его разбиение $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, в котором каждое \mathcal{A}_i состоит из попарно не пересекающихся антиклик. Семейство \mathcal{A} называется 3-незацепленным, если в нем нет трех попарно пересекающихся антиклик. Семейство называется совершенным, если для любых трех различных антиклик A, B, C таких, что $A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, C \cap A \neq \emptyset$, справедливо $A \cap B = B \cap C = C \cap A$.

Каждый следующий из указанных трех классов семейств включает предыдущий как собственное подмножество. Например: а) если H содержит только два ребра или является полным графом, то \mathcal{A} двудольное; б) если H является циклом длины 5, то \mathcal{A} 3-незацепленное, но не двудольное; в) если H состоит из треугольника и не смежного с ним ребра, то \mathcal{A} совершенное, но не 3-незацепленное; если H состоит из трех попарно не смежных ребер, то H несовершенное.

В [8] утверждалось: (i) если \mathcal{A} двудольное, то H разрешимо в $\frac{1}{2} \mathbb{Z}_+$; (ii) если \mathcal{A} 3-незацепленное, то H разрешимо в $\frac{1}{4} \mathbb{Z}_+$. Доказательство (i) следовало из псевдополиномиального алгоритма, решающего задачу $\mathcal{P}(G, s, H)$ при целочисленном s и двудольном $\mathcal{A}(H)$ (число действий этого алгоритма оценивается полиномом от $|V|$ и $|E|$, умноженным на $s(E)$). Утверждение (ii) следовало из эффективной конструкции, сводящей задачу $\mathcal{P}(G, s, H)$ с 3-незацепленным $\mathcal{A}(H)$ к задаче $\mathcal{P}(G', s', H')$ с двудольным $\mathcal{A}(H')$, при этом каждому допустимому решению второй задачи соответствует допустимое решение первой задачи в двое большей дробности. Подробности доказательства (i) и (ii) приведены в [9, п. 5]. Наконец, недавно автор получил полное описание класса схем ограниченной дробности, доказав, что таковыми являются схемы H с совершенным $\mathcal{A}(H)$ и только они (более того, оказалось, что если $\mathcal{A}(H)$ совершенное, то H разрешимо в $\frac{1}{2} \mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности).

В настоящей работе дается доказательство теоремы, усмивающей результат в [8] для двудольных семейств, а также полиномиальный алгоритм решения соответствующей задачи; краткие схемы доказательства и алгоритма были приведены в [1].

Т е о р е м а 1. Если семейство $\mathcal{A}(H)$ двудольное и функция c внутренне четная, то задача $P(G, c, H)$ имеет целочисленное оптимальное решение (иначе говоря, всякая схема H с двудольным \mathcal{A} разрешима в \mathbb{Z}_+ при условии внутренней четности).

Доказательство теоремы 1 - неконструктивное и делится на две части. В разделе 2 устанавливается специальный вид оптимального двойственного решения (теорема 2.1.), этот результат следует из алгоритма в [8], но здесь мы дадим его прямое и существенно более короткое доказательство. Используя этот факт, мы показываем в разделе 3, что сеть (G, c) может быть последовательно редуцирована к простейшей сети, для которой существование целочисленного оптимального решения будет очевидно, и тем самым докажем теорему 1. Наконец, в разделе 4 будет описан полиномиальный алгоритм решения задачи $P(G, c, H)$ с двудольным $\mathcal{A}(H)$ как при внутренне четном c (с требованием целочисленности решения), так и при $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Число действий алгоритма $O(n^3 \log(t_n))$, где $n = |V|, t = |T|$ и $G(n)$ - трудоемкость нахождения максимального потока в сети n' вершинами. В отличие от алгоритма в [8], этот алгоритм основан на декомпозиции сети, а не на прямом построении максимального мультипотока.

2. Минимальные правильные семейства

В дальнейшем для $P(G, c, H), v(G, c, H), \mathcal{A}(H)$ и $\mathcal{L}(G, H)$ будем применять сокращенные обозначения $P(c), v(c), \mathcal{A}$ и \mathcal{L} . Пусть $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$, \mathcal{A} - двудольное семейство и $\{A_1, A_2\}$ - его разбиение ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$ для любых различных $A, B \in \mathcal{A}, i, j = 1, 2$).

Семейство $\mathcal{X} = \{X_A: A \in \mathcal{A}\}$ назовем полуправильным, если (i) $X_A \subset V$ и $X_A \cap T \subseteq A$ для каждого $A \in \mathcal{A}$ (допускается $X_A = \emptyset$) и (ii) каждый полюс $s \in T$ принадлежит ровно одному множеству $X_A \in \mathcal{X}$. Полуправильное семейство \mathcal{X} , состоящее из попарно не пересекающихся множеств, называется правильным. Определим пропускную способность $c(\mathcal{X})$ полуправильного семейства \mathcal{X} как $\frac{1}{2} \sum (c(\partial X_A): A \in \mathcal{A})$.

Т е о р е м а 2.1. $v(c)$ равно минимуму величин $c(\mathcal{X})$ по всем полуправильным семействам \mathcal{X} , причем минимум достигается на некотором правильном семействе.

Доказательство состоит из ряда утверждений. Пусть $f: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$ - некоторый оптимальный мультипоток, и пусть $\mathcal{L}^+(f)$ обозначает множество $\{L \in \mathcal{L}: f(L) > 0\}$. Скажем, что подмножество $X \subseteq V$ насыщено f , если $\sum^+(e) = c(e)$ для каждого $e \in \partial X$ (т.е. f насыщает каждое ребро разреза ∂X), X согласовано с f , если оно согласовано с каждой цепью в $\mathcal{L}^+(f)$. Из определения полуправильного семейства \mathcal{X} следует, что для любого $st \in U$ существуют и единственны множества $X_A, X_B \in \mathcal{X}$ такие, что $s \in X_A \not\subseteq t$ и $s \notin X_B \supseteq t$. Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

(2.2) Для любого полуправильного семейства \mathcal{X} справедливо $c(\mathcal{X}) \geq v(c)$, и равенство выполняется в том и только в том случае, когда каждое множество $X_A \in \mathcal{X}$ насыщено и согласовано с f .

Две пересекающиеся антиклики будем называть смежными. Будем говорить, что $s \in T$ является 1-полюсом (2-полюсом), если s принадлежит ровно одной (двум) антиклизам. Для полюсов s и t (не обязательно различных) будем применять обозначение $s \sim t$, если $s, t \in A \cap B$ для некоторых смежных антиклик A и B , и обозначение $s \not\sim t$ - в противном случае. В частности, $s \sim s$, если s - 2-полюс, и $s \not\sim s$, если s - 1-полюс. Из 3-незацепленности \mathcal{A} тривиально следует

(2.3) Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. (i) Если $s, t \in A, s \not\sim t, p \in T - A$, то по крайней мере одно из ребер sp и tp принадлежит U . (ii) Если $st \in U$ и $s' \sim s$, то $s't \in U$. (iii) Если A и B смежны и либо $s \in A \cap B, t \in T - (A \cup B)$, либо $s \in A - B, t \in B - A$, то $st \in U$.

Пусть $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ - оптимальное решение задачи $P^*(c)$, двойственной к $P(c)$ (рассматриваемой как задача линейного программирования), т.е. $\ell(EL) \geq 1$ для всех $L \in \mathcal{L}$ и $\sum (c(e)\ell(e): e \in E) = v(c)$. Для произвольных $x, y \in V$ положим $\mu(x, y) = \min\{\ell(EL): L \in \mathcal{L}^{xy}\}$, т.е. μ - метрика, устанавливающая расстояния в графе G с длинами ребер ℓ (если $x = y$, то $\mu(x, y) = 0$, и если x и y принадлежат разным компонентам связности в G , то $\mu(x, y) = \infty$). Тогда $\mu(st) \geq 1$ для любого $st \in U$, и из теоремы о дополняющей нежесткости линейного программирования, примененной к $P(c), P^*(c)$, следует

(*) $e \in E, \ell^+(e) < c(e) \Rightarrow \ell(e) = 0$;
 (**) $L \in \mathcal{L}^+(f) \Rightarrow \ell(EL) = 1 \Rightarrow \mu(st) = 1$, где s и t концы L .

Для $A \in \mathcal{A}$ и $x \in V$ определим величины

$$\tau_A(x) = \min \{ \mu(sx) : s \in A \};$$

$$d_A(x) = \min \{ \mu(sx) + \mu(xt) : s, t \in A, s \neq t \}.$$

Положим

$$X_A^* = Y_A = \{ x \in V : d_A(x) < \frac{1}{2} \}, \quad \text{для } A \in \mathcal{A}_1;$$

$$Y_A = \{ x \in V : d_A(x) \leq \frac{1}{2} \}, R_A = \{ x \in V : \tau_A(x) = 0 \},$$

$$W_A = R_A \cap \{ x \in V : d_B(x) \geq \frac{1}{2} \forall B \in \mathcal{A} - \{A\} \}, X_A^* = Y_A \cup W_A \quad \text{для } A \in \mathcal{A}_2;$$

$$\mathcal{X}^* = \{ X_A^* : A \in \mathcal{A} \}. \quad \text{Наша цель - показать, что } \mathcal{X}^* \text{ - правильное семейство, каждое множество которого насыщено и согласовано с } f,$$

откуда, ввиду (2.2), будет следовать $c(\mathcal{X}^*) = \nu(c)$, что и докажет теорему. Для поллюсов s и t (не обязательно различных) положим $\tau(st) = 1$, если $st \in U$, и $\tau(st) = 0$ - иначе.

Для поллюсов s, t, p, q (не обязательно различных) положим

$$\tau(s, t, p, q) = \max \{ \tau(st) + \tau(pq), \tau(sp) + \tau(tq), \tau(sq) + \tau(tp) \}.$$

(2.4) (i) Если $\tau(s, t, p, q) = 0$, то $s, t, p, q \in A$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$. (ii) Если $\tau(s, t, p, q) = 1$, то найдется $A \in \mathcal{A}$, содержащее ровно три поллюса из s, t, p, q .

Доказательство. (i) следует из того, что никакие два поллюса из s, t, p, q не образуют ребра в H (иначе было бы $\tau(s, t, p, q) \geq 1$). (ii). Очевидно, каждая антиклика содержит не более трех элементов из s, t, p, q . С точностью до перестановки s, t, p, q возможны два случая: 1) $\tau(st), \tau(sp), \tau(tp) = 0$ и 2) $\tau(st), \tau(sp), \tau(sq) = 0$. В первом случае s, t, p принадлежит некоторой антиклике. Во втором - каждая пара из $\{s, t\}, \{s, p\}, \{s, q\}$ принадлежит некоторой антиклике, и из 3-незащепленности \mathcal{A} следует, что некоторые две из них совпадают, откуда получаем требуемое. \square

(2.5) Для любых $s, t, p, q \in T$ и $x \in V$ справедливо $\mu(sx) +$

$$\mu(tx) + \mu(px) + \mu(qx) \geq \tau(s, t, p, q).$$

Доказательство. Заметим, что для любых $s', t' \in T$ справедливо $\mu(s't') \geq \tau(s', t')$. Пусть для определенности $\tau(s, t, p, q) = \tau(st) + \tau(pq)$. Тогда требуемое неравенство следует из $\mu(sx) + \mu(tx) \geq \mu(st)$ и $\mu(px) + \mu(qx) \geq \mu(pq)$. \square

(2.6) Пусть $A, B \in \mathcal{A}, A \neq B$ и $x \in V$. Тогда: (i) $d_A(x) + d_B(x) \geq 2$, если $A \cap B = \emptyset$; (ii) $d_A(x) + d_B(x) \geq 1$, если A и B смежны.

Доказательство. Пусть $s, t \in A$ и $p, q \in B$ таковы, что $s \neq t, p \neq q, d_A(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$ и $d_B(x) = \mu(px) + \mu(xq)$. Ввиду (2.5), $d_A(x) + d_B(x) \geq \tau(s, t, p, q)$. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Если $\tau(s, t, p, q) \leq 1$, то ввиду (2.4), найдется антиклика A' , содержащая по крайней мере три элемента из s, t, p, q , причем $s, t, p \in A'$

Тогда $A \neq A'$ и $s, t \in A \cap A'$, вопреки $s \neq t$. Пусть теперь A и B смежны. Из $s \neq t$ и $p \neq q$ следует, что не существует антиклики A' , содержащей все s, t, p, q . Отсюда, ввиду (2.4), $\tau(s, t, p, q) \geq 1$. \square

(2.7) Пусть A и B - две различные антиклики и $x \in V$.

Тогда: (i) если $\tau_A(x) + d_B(x) < 1$, то A и B смежны и из $p \in A, \mu(px) = \tau_A(x)$ следует $p \in A \cap B$; (ii) если $A \cap B = \emptyset$ и $\tau_A(x) + \tau_B(x) < 1$, то существует антиклика C , смежная как A , так и B и такая, что $d_C(x) \leq \tau_A(x) + \tau_B(x)$.

Доказательство. (i) Пусть $s, t \in B, s \neq t$ и $d_B(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$. Поскольку $\mu(sp) \leq \tau_A(x) + d_B(x) < 1$, то $sp \notin U$. Аналогично, $tp \notin U$. Пусть B' - антиклика, содержащая s, t, p . Из $s \neq t$ и 3-незащепленности \mathcal{A} следует $B' = B$.

(ii). Пусть $s \in A, t \in B, \tau_A(x) = \mu(sx), \tau_B(x) = \mu(tx)$. Тогда $\mu(st) < 1$ и, следовательно, $st \notin U$; пусть C - антиклика, содержащая s и t . Из 3-незащепленности \mathcal{A} следует, что C определяется единственным образом, откуда $s \neq t$ и $d_C(x) \leq \mu(sx) + \mu(xt)$. \square

Из (2.6) следует $Y_A \cap Y_B = \emptyset$ для любых различных $A, B \in \mathcal{A}$. Далее, пусть $A \in \mathcal{A}_2$ и $x \in R_A$. Из определения W_A следует, что для произвольного $B' \in \mathcal{A}_1$ не может быть одновременно $x \in W_A$ и $x \in Y_{B'}$, а из (2.7) (i) следует, что $d_{B'}(x) \geq 1$ для любого $B' \in \mathcal{A}_2 - \{A\}$. Следовательно, $W_A \cap Y_B = \emptyset$ для любого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$. Далее, если $\tau_B(x) = 0$ для некоторого $B \in \mathcal{A}_2 - \{A\}$, то, согласно (2.7) (ii), найдется антиклика $C \in \mathcal{A}$, для которой $d_C(x) = 0$, откуда $x \notin W_A, W_B$. Таким образом, \mathcal{X}^* состоит из попарно не пересекающихся множеств. Рассмотрим произвольный поллюс s . Если s -

1-поллюс и $s \in A$, то $s \neq s$ и $d_A(s) = \mu(sg) + \mu(ss) = 0$, поэтому $s \in Y_A$. Пусть s - 2-поллюс и $s \in A \in \mathcal{A}_2$. Тогда $\tau_A(s) = \mu(ss) = 0$, и если $s \notin W_A$, то $d_B(s) < \frac{1}{2}$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, откуда, учитывая (2.7) (i), получаем $s \in A \cap B$. Следовательно, всякий поллюс s принадлежит ровно одному множеству $X_C^* \in \mathcal{X}^*$, и при этом $s \in C$. Таким образом, \mathcal{X}^* - правильное семейство.

Осталось доказать, что каждое множество в \mathcal{X}^* насыщено и согласовано с f . Воспользуемся соотношениями (ж) и (жж). Следующее утверждение тривиально.

(2.8) Пусть $x, y \in V, \mu(xy) = 0$ и $A \in \mathcal{A}$. Тогда: (i) если $x \in Y_A$, то $y \in Y_A$; (ii) если $x \in W_A$, то $y \in W_A$.

Для $A \in \mathcal{A}$ и $xy \in \partial X_A^*$ из (2.8) получаем $\mu(xy) > 0$ и, следовательно, $\ell(xy) > 0$, откуда, ввиду (ж), ребро xy насыщено f .

Таким образом, X_A^* насыщено f . Для доказательства согласованности X_A^* с f рассмотрим произвольную pq - цепь $L \in \mathcal{X}^+(f)$ и предположим, что имеется вершина $x \in \gamma L$, содержащаяся в X_A^* . Пусть, для определенности, $q \notin A$, и пусть L' и L'' - отрезки L от p до x и от x до q , соответственно. Согласно (2.3) мы имеем $\ell(E L) = \ell(E L') + \ell(E L'') = \mu(pq) = 1$. Надо показать, что $V L' \subseteq X_A^*$.

1. Предположим, что $x \in Y_A$. Возьмем $s, t \in A, s \neq t$, для которых $d_A(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$. Тогда $\mu(sx) + \mu(tx) + \mu(px) + \mu(qx) \leq \frac{1}{2}$, откуда, ввиду (2.5) и (2.4), $\tau(s, t, p, q) = 1$ и найдется антицикла B , содержащая элементы s, t и $p' \in \{p, q\}$. Очевидно, $B = A$ (иначе было бы $s \sim t$) и, следовательно, $p' = p$. Согласно (2.3) (i) $\{sq, tq\} \cap U \neq \emptyset$. Если для некоторого элемента $s' \in \{s, t\}$ имеет место $s' \sim p$, то $s'q \in U$ (ввиду (2.3) (ii)) и $t' \neq p$, где $\{s', t'\} = \{s, t\}$. Таким образом, мы можем считать, что $sq \in U$ и $t' \neq p$. Из $\mu(sx) + \ell(E L'') \geq \mu(sq) \geq 1$ и $\ell(E L) = 1$ получаем $\mu(tx) + \ell(E L') \leq d_A(x)$, поэтому для любой вершины $y \in \gamma L'$ справедливо $\mu(ty) + \mu(yr) \leq d_A(x)$ и, следовательно, $y \in Y_A$.

2. Предположим теперь, что $A \in \mathcal{A}_2$ и $x \in W_A$. Выберем $s \in A$, для которого $\mu(sx) = r_A(x) = 0$. Тогда $\mu(sx) + \ell(E L') + \ell(E L'') = 1$. Если $sq \in U$, то из этого равенства и $\mu(sq) \geq 1$ следует $\mu(sx) + \ell(E L') = 0$, откуда для произвольного $y \in \gamma L'$ имеем $\mu(sy) = 0$ и, ввиду (2.8), $y \in W_A$. Допустим теперь, что $sq \notin U$, и пусть B - антицикла, содержащая s и q ; очевидно, $B \neq A$ и $s \neq q$. Поскольку $x \in W_A$, то $d_B(x) \geq \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\ell(E L'') + \mu(sx) \geq \frac{1}{2}$, откуда $\mu(sx) + \ell(E L') \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, $sr \notin U$, что, ввиду 3-незацепленности \mathcal{A} , влечет $r \in A$. Но из $rq \in U$ следует $s \neq r$ (иначе было бы $sq \in U$, вопреки $s, q \in B$), и для произвольного $y \in \gamma L'$ мы получаем $d_A(y) \leq \mu(sy) + \mu(yr) \leq \frac{1}{2}$, т.е. $y \in Y_A$.

Этим завершается доказательство теоремы 2.1.

(2.9) Следствие. Если функция c внутренне четная, то для любого полуправильного семейства \mathcal{X} величина $c(\mathcal{X})$ целая (и, следовательно, величина $v(c)$ тоже целая).

Действительно, пусть $A \in \mathcal{A}$ и \mathcal{X}' - правильное семейство, состоящее из множеств $X'_A = X_A \cup (V - T)$ и $X'_B = X_B \cap (B \in \mathcal{A} - \{A\})$. На внутренней четности c следует $c(\partial X'_C) \equiv c(\partial X_C) \pmod{2}$ для любого $C \in \mathcal{A}$ (учитывая $X'_C \cap T = X_C \cap T$), поэтому величина $c(\mathcal{X}') - c(\mathcal{X})$ - целая. Поскольку \mathcal{X}' является разбиением

множества V , каждое ребро $e \in E$ встречается в четном числе разрезов $\partial X'_C, C \in \mathcal{A}$, откуда получаем, что $c(\mathcal{X}')$ - целое.

3. Декомпозиция сети

В этом разделе завершается доказательство теоремы I. Нам будет удобно считать, что граф G полный, т.е. $x, y \in E$ для любых различных $x, y \in V$ (если в исходном графе G отсутствует какое-либо ребро xy , добавим его, положив $c(xy) = 0$). Пусть c - внутренне четная функция.

Полуправильное семейство \mathcal{X} , для которого $c(\mathcal{X}) = v(c)$, назовем c -минимальным. Обозначим через $\mathcal{M}(c)$ множество всех c -минимальных правильных семейств. Доказательство теоремы проводится по индукции. А именно, будем предполагать, что при фиксированных G и c теорема верна для всех внутренне четных функций c' таких, что либо $|\mathcal{M}(c')| > |\mathcal{M}(c)|$, либо $|\mathcal{M}(c')| = |\mathcal{M}(c)|$ и $c'(E) < c(E)$. Теорема очевидна при $c = 0$ (заметим, что в этом случае всякое правильное семейство является c -минимальным, т.е. $|\mathcal{M}(c)|$ максимально возможное).

Пусть f , как и прежде, обозначает некоторое оптимальное решение задачи $\mathcal{P}(G, c, U)$. Тройку вершин x, y, z , в которой $y \neq x, z$, а x и z могут совпадать, назовем вилкой функции c , если $c(xy) > 0$ и $c(yz) > 0$. Для вилки x, y, z определим функцию $\theta = \theta_{x, y, z}$ на E как: 1) $\theta(xy) = 2$ и $\theta(e) = 0 (e \in E - \{xy\})$, если $x = z$, и 2) $\theta(xy) = \theta(yz) = 1$, $\theta(xz) = -1$ и $\theta(e) = 0 (e \in E - \{xy, yz, xz\})$, если $x \neq z$. Вилку x, y, z назовем существенной (относительно f), если $x \neq z$ и в множестве $\mathcal{X}^+(f)$ найдется цепь, содержащая оба ребра xy и yz .

(3.1) Пусть x, y, z - вилка и $c' = c - \theta_{x, y, z}$. Тогда: (i) функция c' - внутренне четная; (ii) $v(c) \geq v(c') \geq v(c) - 2$; (iii) если $v(c') = v(c)$, то $\mathcal{M}(c') \supseteq \mathcal{M}(c)$; (iv) если вилка x, y, z - существенная и $\mathcal{X} = \{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ - такое правильное семейство, что $c'(\mathcal{X}) < v(c)$, то $c'(\mathcal{X}) = v(c) - 1$, $c(\mathcal{X}) = v(c) + 1$, и имеются $X_A, X_B \in \mathcal{X}$, для которых $y \notin X_A \ni x, z$ и $x, z \notin X_B \ni y$ (откуда, в частности, следует, что либо $v(c') = v(c)$ либо $v(c') = v(c) - 1$).

Доказательство. (i) очевидно. Пусть \mathcal{X}' - произвольное правильное семейство. Согласно (2.9), величины $c(\mathcal{X})$ и $c'(\mathcal{X})$ - целые. Для всякого $X_C \in \mathcal{X}$ мы имеем $c'(\partial X_C) = c(\partial X_C) - 2$, если $x, y, yz \in \partial X_C$, и $c'(\partial X_C) = c(\partial X_C)$ - в остальных случаях.

ях. Поскольку множества в \mathcal{X} попарно не пересекаются, то в \mathcal{X} имеется не более двух множеств X_C , для которых $x, y, z \in \partial X_C$, следовательно, $c(\mathcal{X}) \geq c'(X) \geq c(X) - 2$. Отсюда получаем (ii) и (iii). Пусть теперь x, y, z и \mathcal{X} определены как в (iv), и пусть $X_C \in \mathcal{X}$ - такое множество, что $x, y, z \in \partial X_C$. Тогда X_C не согласовано с f и, ввиду (2.2), \mathcal{X} не является c -минимальным. Отсюда легко получаем (iv). \square

Пусть $K(f)$ обозначает множество существенных вилок для f . Если $K(f) = \emptyset$ (т.е. $|EL| = 1$ для всех $L \in \mathcal{L}^+(f)$), то, очевидно, мультипоток f - целочисленный. Таким образом, мы можем далее считать, что $K(f) \neq \emptyset$. Вилку x, y, z назовем отделяемой, если $v(c') = v(c)$, где $c' = c - \theta_{xyz}$. Наша цель состоит в том, чтобы доказать существование отделяемой вилки. В предположении, что этот факт нами доказан, доказательство теоремы I завершается следующим образом. Пусть x, y, z - отделяемая вилка и $c' = c - \theta_{xyz}$. Поскольку $c'(E) < c(E)$ и $\mathcal{M}(c') \supseteq \mathcal{M}(c)$ (ввиду (3.1) (iii)), то по индукции задача $\mathcal{P}(c')$ имеет целочисленное оптимальное решение f' . Если $x = z$ либо $x \neq z$ и $\mathcal{E}^{f'}(xz) \leq c(x, y)$, то, очевидно, f' - оптимальное решение для $\mathcal{P}(c)$. Если $x \neq z$ и $\mathcal{E}^{f'}(xz) = c(x, z) + 1 (= c'(xz))$, положим $f^*(L) = f'(L) - 1, f^*(L') = f'(L') + 1, f^*(L'') = f'(L'') (L \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, где L - некоторая цепь в $\mathcal{L}^+(f)$, содержащая ребро xz и L' - цепь в \mathcal{L} , для которой $E L' \subseteq (EL - \{xz\}) \cup \{xy, yz\}$. Очевидно, мультипоток $f^* - c$ - допустимый, и $1 \cdot f^* = 1 \cdot f' = v(c)$, таким образом, f^* - оптимальное целочисленное решение задачи $\mathcal{P}(c)$.

Приступим к доказательству существования отделяемой вилки. Мы можем далее считать, что никакая существенная вилка не является отделяемой. Надо показать, что тогда обязательно найдется отделяемая несущественная вилка. Выберем некоторую существенную вилку x, y, z и положим $c' = c - \theta_{xyz}, c'' = c - \frac{1}{2} \theta_{xyz}$ и $\tilde{c} = 2c''$. Для любого правильного семейства \mathcal{X} справедливо $c''(X) = \frac{1}{2}(c(X) + c'(X))$, откуда, ввиду (3.1) (iv), мы получаем следующее:
 1) $v(c'') = v(c)$; 2) если $c(X) = v(c)$, то $c''(X) = v(c'')$; 3) если $c'(X) = v(c') (= v(c) - 1)$, то $c''(X) > v(c'')$. Таким образом, $\mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c'') \supseteq \mathcal{M}(c)$. Так как функция \tilde{c} , очевидно, внутренне четная, то по предположению индукции задача $\mathcal{P}(\tilde{c})$ имеет целочисленное оптимальное решение \tilde{f} . Поскольку $\tilde{c} = 2c - \theta_{xyz}$, и для функции $2c$ вилка x, y, z является отделяемой, то указанным выше способом мультипоток \tilde{f} можно перестро-

ить в $2c$ -допустимый целочисленный мультипоток \tilde{f}^* с $1 \cdot \tilde{f}^* = 1 \cdot \tilde{f}$. Таким образом, задача $\mathcal{P}(2c)$ имеет целочисленное оптимальное решение, и, следовательно, задача $\mathcal{P}(c)$ имеет целочисленное оптимальное решение.

Итак, мы можем считать, что f принимает значения в $\frac{1}{2} \mathbb{Z}_+$. Будем предполагать также, что среди всех получелочисленных оптимальных решений задачи $\mathcal{P}(c)$ мультипоток f имеет минимальную величину $\xi^f(E)$. Для существенной вилки x, y, z правильное семейство \mathcal{X} , указанное в (3.1) (iv), будем называть критическим, а X_A и X_B - соответственно, внешним и внутренним множествами (относительно x, y, z).

(3.2) Пусть x, y, z - существенная вилка, \mathcal{X} - правильное семейство, критическое для x, y, z , $X_A, X_B \in \mathcal{X}$ - соответственно, внешнее и внутреннее множества и $L \in \mathcal{L}^+(f)$ - цепь, содержащая ребра xy и yz . Тогда: (i) каждое множество $X_C \in \mathcal{X}$ насыщено f ; (ii) каждое множество $X_C \in \mathcal{X} - \{X_A, X_B\}$ согласовано с f ; (iii) множества X_A и X_B согласованы с каждой цепью в $\mathcal{L}^+(f) - \{L\}$; (iv) $|EL \cap \partial X_A| = 3$; (v) $f(L) = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Положим $c' = c - \frac{1}{2} \theta_{xyz}$ и определим мультипоток f' как $f'(L) = f(L) - \frac{1}{2}, f'(L') = f(L') + \frac{1}{2}, f'(L'') = f(L'') (L'' \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, где L' - цепь в \mathcal{L} , для которой $E L' = (EL - \{xy, yz\}) \cup \{xz\}$. Тогда $v(c') = v(c)$ и f' - оптимальное решение для $\mathcal{P}(c')$. Теперь (i), (ii), (iii) и (v) легко следуют из (2.2), примененного к c', f' и \mathcal{X} . Наконец, $|EL \cap \partial X_A| = 1$ (так как $\forall L \cap X_A \neq \emptyset$), откуда $|EL \cap \partial X_A| = |EL \cap \partial X_A| + 2 = 3$. \square

Пусть \tilde{V} - множество вершин $y \in V$, для которых имеется хотя бы одна существенная вилка x, y, z . Рассмотрим некоторую вершину $y \in \tilde{V}$ и существенную вилку x, y, z . Из (3.2) (iii) следует, что в $\mathcal{L}^+(f)$ имеется единственная цепь L , содержащая оба ребра xy и yz . Поскольку $f(L) = \frac{1}{2}$, и ребро xy насыщено f , то верно по крайней мере одно из двух: 1) найдется существенная вилка x', y, z , $x' \neq z$ 2) ребро xy принадлежит цепи $L' \in \mathcal{L}^+(f)$ с одним концом в y (и, в частности, y является полем). Отсюда нетрудно заключить, что должна иметь место хотя бы одна из двух ситуаций:

- (с1) в G есть вершина y и различные вершины $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+1}$ такие, что для каждого $i = 1, \dots, k$ x_i, y, x_{i+1} - существенная вилка;
- (с2) $\forall y \in \tilde{V}$ и для некоторых $s \in \Gamma$ и $x, z \in V$ имеется цепь

$\mathcal{X}^+(f)$, содержащая ребра xs и sz , и st - цепь.
 $\mathcal{X}^-(f)$ - содержащая ребро sz .

Покажем, что в действительности ситуация (с2) невозможна. Воспользуемся следующим утверждением.

(3.3) Пусть $Z \in \mathcal{X}^+(f)$ - pq - цепь, и $T = T \cap (V \setminus \{p, q\}) \neq \emptyset$. Тогда $T \subseteq A \cap B$ для некоторых различных $A, B \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Из минимальности величин $\xi^j(e)$ следует, что $p'q' \notin U$ для любой пары $\{p', q'\} \subset V \setminus T$, отличной от $\{p, q\}$ (иначе можно было бы "укоротить" цепь Z). Выберем $p' \in T$, и пусть A - антиклика, содержащая p и p' , а B - антиклика, содержащая p' и q . Пусть $q' \in T - \{p'\}$. Из $p'q' \notin U$ и (2.3) (iii) следует $q' \in A \cup B$. Если бы было $q' \in A$, то, ввиду $p'q' \notin U$, нашлась бы антиклика $C \neq A, B$, содержащая p и q' , что противоречило бы 3-незацепленности \mathcal{A} . Следовательно $T' \subseteq A \cap B$. \square

Рассмотрим s, x, z, L, L' , указанные в (с2). Пусть L имеет концы p и q , и пусть X_A - внешнее множество правильного семейства, критического для xsx . Заметим, что из $V \subseteq T$ следует $x, z \in T$. Поскольку $|EL| \geq |EL \cap \partial X_A| = 3$, то хотя бы один из полюсов x и z , назовем x , отличен от p и q . Из (3.3) и $x \in X_A \cap T \subseteq A$ мы получаем $s \in A$. Пусть t - конец цепи L' , отличный от s . Поскольку X_A согласовано с L' (из (3.2) (iii)) и $s \notin X_A$, то $t \in X_A$. Таким образом, L' имеет оба конца в антиклике A , что невозможно.

Приступим теперь к рассмотрению ситуации (с1), и пусть y, x_1, \dots, x_k - указанные вершины. Мы покажем, что ветка вида $x_i y x_{i+1}$ является отдельной. Пусть $\mathcal{X}^i = \{X_B^i : B \in \mathcal{A}\}$ обозначает правильное семейство, критическое для $x_i y x_{i+1}$. $X_{A(i)}^i \in \mathcal{X}^i$ - внешнее множество (относительно $x_i y x_{i+1}$), $T^i = T \cap X_{A(i)}^i$ и $L^i \in \mathcal{X}^+(f)$ - цепь, содержащая ребра $x_i y$ и $y x_{i+1}$, $i = 1, \dots, k$. Далее индексы берутся по модулю k .

(3.4) Для любого $i = 1, \dots, k$ либо $A(i) = A(i+1)$, либо $A(i)$ смежно $A(i+1)$.

Доказательство. Предположим, что $A(i) \cap A(i+1) = \emptyset$. Тогда $T^i \cap T^{i+1} = \emptyset$ и, следовательно, $Y = (X^i - \{X\}) \cup \{X - Y\}$ и $Y' = (X^{i+1} - \{Y\}) \cup \{Y - X\}$, где $X = X_{A(i)}^i$ и $Y = X_{A(i+1)}^{i+1}$ - правильные семейства. Поскольку внутреннее (относительно $x_i y x_{i+1}$) множество в X^i не согласовано с f , и это множество присутствует в Y , то $c(Y) \geq v(c) + 1$. Аналогично, $c(Y') \geq v(c) + 1$. Таким образом, $c(Y) + c(Y') \geq c(X^i) + c(X^{i+1})$. С другой стороны,

$x_{i+1} y \in \partial X, \partial Y$ и $x_{i+1} y \notin \partial(X - Y), \partial(Y - X)$, и, следовательно, для X и Y выполняется строгое субмодулярное неравенство $c(\partial X) + c(\partial Y) > c(\partial(X - Y)) + c(\partial(Y - X))$, откуда получаем $c(X^i) + c(X^{i+1}) > c(Y) + c(Y')$. Противоречие. \square

Пусть $Z \subset [z, z']$ обозначает отрезок цепи L от z до z' , где $z, z' \in V$. Для $i = 1, \dots, k$ пусть S_i обозначает тот конец цепи L^i , для которого x_i содержится в $L^i \cap S_i y$, и пусть t_i - другой конец L^i . Из (3.2) (ii), (iv) легко получаем следующее утверждение.

(3.5) Для любого $j = 1, \dots, k$ справедливо: (i) $t_{j-1}, s_{j+1} \in T_j^j$, (ii) ровно один из полюсов S_j в t_j принадлежит T_j^j , \square

(3.6) Для любого $i = 1, \dots, k$ по крайней мере один из полюсов S_{i+1} и t_i принадлежит $T^i \cap T^{i+1}$.

Доказательство. Предположим противное. Из (3.5) (i) (при $j = i+1$ и $j = i$) имеем $t_i \in T^{i+1}$ и $s_{i+1} \in T^i$. Тогда $t_i \notin T^i$ и $s_{i+1} \notin T^{i+1}$, откуда, ввиду (3.5) (ii), $s_i \in T^{i+1}$ и $t_{i+1} \in T^{i+1}$. Таким образом, $s_i, s_{i+1} \in A(i), t_i, t_{i+1} \in A(i+1)$, что влечет $A(i) \neq A(i+1)$. Следовательно, $A(i)$ смежно $A(i+1)$ (ввиду (3.4)). Кроме того, из (2.3) (iii) мы получаем $s_i t_{i+1} > s_{i+1} t_i \in U$. Пусть L и L' обозначают, соответственно, $S_i t_{i+1}$ - цепь и $S_{i+1} t_i$ - цепь, для которых $EL \subseteq EL \cap [s_i y] \cup EL^{i+1} \cap [y t_{i+1}]$ и $EL' \subseteq EL' \cap [s_{i+1} x_{i+1}] \cup EL^i \cap [x_{i+1} t_i]$. Определим мультипликатор f' как $f'(L) = f(L) + \frac{1}{2}, f'(L') = f(L') + \frac{1}{2}, f'(L^i) = f'(L^{i+1}) = 0$ и $f'(L^j) = f(L^j)$ для остальных цепей L^j в \mathcal{L} . Очевидно, $f - f' = v(c)$ и $\xi^{f'}(e) \leq \xi^f(e)$ для каждого $e \in E$. Но $\xi^{f'}(x_{i+1} y) < \xi^f(x_{i+1} y)$ (поскольку цепи L и L' не содержат ребро $x_{i+1} y$), что противоречит минимальности $\xi^f(E)$. \square

Пусть, для определенности, $s_i \in T^i$. Тогда из (3.5) и (3.6) следует, что $s_i \in T^{i+1} \cap T^i$ и $t_i \in T^{i+1} - T^i$, $i = 1, \dots, k$ (рис. 1). Отсюда и из (3.4) мы получаем, что для любого i справедливо:

- (1) $s_i \in A(i-1) \cap A(i), t_i \in A(i+1) - A(i)$;
- (2) $A(i)$ смежно $A(i+1)$ (ввиду (3.4) и $s_i \in T^i, t_i \in T^{i+1}$);
- (3) $A(i) \neq A(i+2)$ (поскольку $s_{i+1} \in T^{i+1}$ и $t_{i+1} \in T^{i+2}$);
- (4) $A(i) \neq A(i+3)$ (иначе $A(i), A(i+1), A(i+2)$ были бы попарно смежными).

Из (4), в частности, следует, что $k \geq 4$. Кроме того, из (1), (3) и 3-незацепленности \mathcal{A} имеем

(5) $A(i) \cap A(i+2) = \emptyset$.

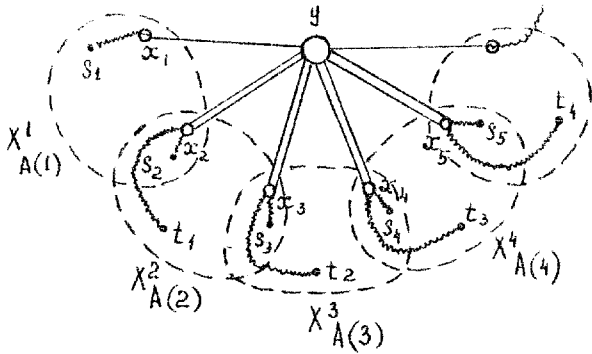


Рис. 1

(3.7) Вилка $\alpha_2 y \alpha_4$ является отделяемой.

Доказательство. Из (1) и (5) следует $s_1 \notin A(2), A(3)$ откуда, ввиду (2.3) (iii), $s_1, s_3 \in U$; пусть $P_1 - s_1 s_3$ - цепь, для которой $E P_1 \subseteq E L^1[s_1, y] \cup E L^3[y, s_3]$. Аналогично, $s_2, s_4 \in U$. Рассмотрим два случая.

1) $t_1, t_3 \in U$. Образует $s_2 s_4$ - цепь P_2 и t_1, t_3 - цепь P_3 такие, что $E P_2 \subseteq E L^2[s_2, \alpha_2] \cup \{ \alpha_2 \alpha_4 \} \cup E L^4[\alpha_4, s_4]$ и $E P_3 \subseteq E L^1[t_1, \alpha_2] \cup \{ \alpha_2 \alpha_4 \} \cup E L^3[\alpha_4, t_3]$. 2) $t_1, t_3 \notin U$. Пусть B - антиклика, содержащая t_1 и t_3 . Из (1) и (5) следует, что B отлично от $A(1), A(2), A(3)$ и $A(4)$. Тогда t_1 и t_3 - 2-полосы, $t_3 \notin A(1), A(2)$, $t_1 \notin A(3), A(4)$, и из (2.3) (iii) мы получаем $s_2 t_3 \in U$ и $t_1 s_4 \in U$. Образует $s_2 t_3$ - цепь P_2 и $t_1 s_4$ - цепь P_3 такие, что $E P_2 \subseteq E L^2[s_2, \alpha_2] \cup \{ \alpha_2 \alpha_4 \} \cup E L^3[\alpha_4, t_3]$ и $E P_3 \subseteq E L^1[t_1, \alpha_2] \cup \{ \alpha_2 \alpha_4 \} \cup E L^4[\alpha_4, s_4]$. В каждом из двух случаев определим мультипоток f как $f'(P_j) = f(P_j) + \frac{1}{2} (j = 1, 2, 3)$, $f'(L^m) = f(L^m) - \frac{1}{2} (=0) (m = 1, 2, 3, 4)$ и $f'(L) = f(L)$ для остальных L в \mathcal{L} . Очевидно, f' является c' -допустимым, где $c' = c - \theta \alpha_2 y \alpha_4$, и $v(c') \geq 1 - f' = 1 - f - \frac{1}{2} v(c) - \frac{1}{2}$. Но величины $v(c)$ и $v(c')$ - целые, поэтому $v(c') = v(c)$. Следовательно, вилка $\alpha_2 y \alpha_4$ - отделяемая. \square

Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

4. Алгоритм

В основе алгоритма лежит та же идея декомпозиции сети (отделение вилок), что и в доказательстве теоремы 1. Для определения

максимального возможного "веса", с которым может быть отделена очередная вилка, используется процедура построения c - минимального семейства X (для текущего c). Следует заметить, что метод построения такого семейства, данный в разделе 2, является недостаточно эффективным, так как он предполагает решение двойственной задачи $P^*(c)$. Покажем, что построение c - минимального семейства можно свести к отысканию обычного минимального разреза в некоторой расширенной сети.

Пусть $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ возьмем копию $G_A = (V_A, E_A)$ графа G ; пусть α_A обозначает копию вершины $\alpha \in V$ в графе G_A . Склеим графы $G_A, A \in \mathcal{A}$ между собой, производя следующие отождествления вершин и ребер для каждого двух смежных антиклик $A, B \in \mathcal{A}$: отождествим вершины α_A и α_B , если $\alpha \in A \cap B$; отождествим ребра $\alpha_A y_A$ и $\alpha_B y_B$, если $\alpha, y \in A \cap B$ и $\alpha y \in E$. Полученный граф обозначим G' . Сохраним обозначение G_A за соответствующим подграфом графа G' . Пусть \tilde{A} обозначает множество 1-полосов в антиклике A , т.е. $\tilde{A} = A - U(B: B \in \mathcal{A} - \{A\})$. Образует граф $G' = (U, \mathcal{E})$, добавив к G' вершины s^0 ("источник"), t^0 ("сток") и следующие ребра: 1) $s^0 s_A$, где $s \in \tilde{A}, A \in \mathcal{A}_1$; 2) $s^0 t_A$, где $t \in \tilde{A}, A \in \mathcal{A}_2$; 3) $t^0 t_A$, где $t \in \tilde{A}, A \in \mathcal{A}_1$; 4) $t^0 s_A$, где $s \in \tilde{A}, A \in \mathcal{A}_2$ (на рис. 2 изображен пример графа G' , совокупности \mathcal{A}_1 и соответствующего графа G' ; здесь $\mathcal{A}_1 = \{A = \{s, t\}, C = \{p, q, z\}\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{B = \{t, p, q\}\}$).

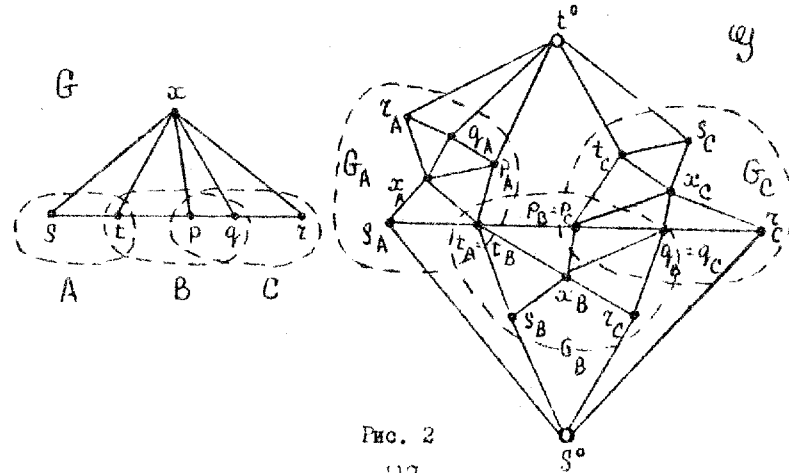


Рис. 2

Для каждого $A \in \mathcal{A}$ обозначим через \mathcal{G}_A вложение G в \mathcal{G} , при котором G естественно отображается в подграф \mathcal{G}_A . Занедем пропускные способности $d = d^c$ ребер графа \mathcal{G} следующим образом: пусть $x, y \in E$, $A \in \mathcal{A}$ и $e = \mathcal{G}_A(xy) \in \mathcal{E}$; тогда, если $x, y \in A \cap B$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, то полагаем $d(e) = 2c(xy)$, в остальных случаях полагаем $d(e) = c(xy)$; для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$, инцидентного s^0 или t^0 полагаем $d(e) = \infty$ (легко видеть, что это определение корректно).

Разрез ∂Z графа \mathcal{G} назовем (s^0, t^0) -разрезом, если $s^0 \in Z \subset U$ и $t^0 \notin Z$. Пусть \mathcal{Q} обозначает множество всех $Z \subset U$, для которых $\partial Z = (s^0, t^0)$ -разрез, не содержащий ребер, инцидентных s^0 или t^0 . Для $Z \in \mathcal{Q}$ определим семейство $\omega(Z) = \{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ подмножеством в V как $X_A = \mathcal{G}_A^{-1}(Z \cap V_A)$ при $A \in \mathcal{A}_1$ и $X_A = \mathcal{G}_A^{-1}(V_A - Z)$ при $A \in \mathcal{A}_2$. Из конструкции графа \mathcal{G} непосредственно вытекает следующее утверждение (аккуратная проверка оставляется читателю).

(4.1) Отображение ω является биекцией между \mathcal{Q} и множеством всех полунравильных семейств для G и \mathcal{A} . При этом для $Z \in \mathcal{Q}$ и $X = \omega(Z)$ справедливо $d^c(\partial Z) = 2c(X)$.

Таким образом, нахождение c -минимального полунравильного семейства X и величины $v(c) = c(X)$ сводится к построению в графе $\mathcal{G}(s^0, t^0)$ - разреза ∂Z минимальной пропускной способности $d^c(\partial Z)$ (здесь учитывается тот факт, что если $s^0 \in Z' \neq t^0$, но $Z' \notin \mathcal{Q}$, то разрез $\partial Z'$ содержит ребро бесконечной пропускной способности, и следовательно, не может быть минимальным (s^0, t^0) -разрезом). Заметим, что при желании из c -минимального полунравильного семейства $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ можно получить c -минимальное правильное семейство $\{X'_A : A \in \mathcal{A}\}$, положив $X'_A = X_A - U \setminus \{X_B : B \in \mathcal{A} - \{A\}\}$ (это простое утверждение мы оставляем читателю).

Приступим к описанию алгоритма решения задачи $P(c)$. Будем различать два случая: 1) c принимает значения из \mathbb{R}_+ , 2) c - внутренне четная функция. В первом случае требуется построить оптимальный мультипоток $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$, а во втором $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Нам опять будет удобно считать, что граф G планар.

Вначале мы рассматриваем первый случай. Для функции $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ и тройки вершин x, y, z ($y \neq x, z$) пусть $b(c, x, y, z)$ обозначает минимальное число $a \in \mathbb{R}_+$ такое, что $a \leq c'(xy), c'(yz)$ и $\gamma(c' - a\theta_{xyz}) = v(c)$. Алгоритм состоит из основного и вспомогательного этапов. В начале алгоритма вычисляем число $v(c)$. На основном этапе последовательно обрабатываем вершины в G , и для каждого $y \in V$ последовательно обрабатываем

каждую тройку x, y, z , $x, z \in V - \{y\}$ (исключая $x = z$), при этом порядок каждого перебора произволен. Обработка очередной вершины y составляет итерацию этапа, а обработка очередной тройки x, y, z - шаг итерации (таким образом, основной этап состоит из $|V|$ итераций, а каждая итерация - из $\frac{1}{2}|V|(|V|-1)$ шагов). Обработка тройки x, y, z заключается в нахождении для текущей функции c числа $b = b(c, x, y, z)$ и преобразовании $c := c - b\theta_{xyz}$. В конце основного этапа для получившейся функции \tilde{c} определяется оптимальное решение f задачи $P(\tilde{c})$ как $f(L_{st}) = \tilde{c}(st)(st \in U)$, где L_{st} - цепь с $E \setminus L_{st} = \{st\}$ (f считается продолженным нулем на остальные цепи в \mathcal{L}).

Число $b(c, x, y, z)$ находится следующим образом. Если $a_0 = \min\{c(xy), c(yz)\} = 0$, то полагаем $b(c, x, y, z) = 0$. Иначе полагаем $c_0 = c - a_0\theta_{xyz}$ и определяем $v(c_0)$ (для этого, в соответствии с (4.1), в сети (\mathcal{G}, d^{c_0}) надо найти величину q максимального потока из s^0 в t^0 и положить $v(c_0) = \frac{1}{2}q$). Если $v(c_0) = v(c)$, то полагаем $b(c, x, y, z) = a_0$. Если же $h_0 = v(c) - v(c_0) > 0$, то полагаем $a_1 = a_0 - \frac{1}{2}h_0$, $c_1 = c - a_1\theta_{xyz}$ и определяем $v(c_1)$. Искомым числом $b(\tilde{c}, x, y, z)$ в этом случае является $a_i - h_i$, где $h_i = v(c) - v(c_i)$.

Дадим обоснование основного этапа. Прежде всего заметим, что в процессе этапа величина $v(c)$ (для текущих c) не изменяется. Докажем правильность нахождения чисел $b(c, x, y, z)$ и тот факт, что для любой тройки x, y, z в результате основного этапа станет $b(\tilde{c}, x, y, z) = 0$. Для произвольных $y \in V, x, z \in V - \{y\}, a \in \mathbb{R}_+$ и правильного семейства X справедливо $c'(X) = c(X) - ak$, где $c' = c - a\theta_{xyz}$ и $k = k(X, x, y, z)$ - число таких $X_A \in X$, что $x, y, z \in X_A$; при этом k может быть равно только 0, 1 или 2. Таким образом,

(*) $b(c, x, y, z) = \min\{c(xy), c(yz), \min\{\Delta(X) : X \in \mathcal{K}\}\}$, где \mathcal{K} - множество всех правильных семейств, $\Delta(X) = \Delta(X, x, y, z) = (c(X) - v(c))/k$ при $k = k(X, x, y, z) > 0$ и равно ∞ при $k = 0$. Отсюда легко следует правильность нахождения чисел $b(c, x, y, z)$ в алгоритме. Далее, пусть на некотором шаге обрабатывается тройка x, y, z . Докажем, что если перед началом рассматриваемого шага для каждой ранее обработанной тройки x', y', z' выполнялось $b(c, x', y', z') = 0$, то это свойство сохранится и после выполнения шага. Пусть c_1 и c_2 обозначают функцию c непосредственно до и после данного шага, и пусть x', y', z' некоторый ранее обработанный

