МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

**Межведомственный тематический сборник научных трудов**

Издание Омского
университета

Омск I987

А.В. Карзанов
Всесоюзный научно-исследовательский институт
системных исследований АН СССР

# ОДИН КЛАСС ЗАДАЧ О МАКСИМАЛЬНЫХ МНОГОПРОДУКТОВЫХ ПОТОКАХ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ОПТИМАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

В работе [I] утверждалось существование целочисленных оптимальных решений для одного весьма широкого класса задач о максимальных по суммарной мощности многопродуктовых потоках в неориентированных сетях и приводился набросок полиномиального алгоритма, отыскивающего такие решения. В настоящей работе дается полное изложение этих результатов.

## I. Введение

Под *графом* будем понимать конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер; ребро с концевыми вершинами $x$ и $y$ может быть обозначено $xy$. *Цепью* ($xy$ *-цепью*) графа будем считать его подграф $L=(VL, EL)$, в котором множества вершин и ребер имеют вид $VL=\{x=x_0, x_1,\dots, x_k=y\}$ и $EL=\{x_i x_{i+1} : i=0,\dots,k-1\}$; иногда цепь $L$ будем обозначать также $x_0 x_1\dots x_k$.

Мы будем иметь дело со следующими объектами: (основным) графом $G=(V,E)$, на ребрах которого заданы пропускные способности $c(e)\geq 0$, $e\in E$, и графом $H=(T,U)$ без изолированных вершин, для которого $T\subseteq V$. Пара $(G, c)$, граф $H$ и множество его вершин $T$ будут называться, соответственно, (потоковой) *сетью*, (потоковой) *схемой* и множеством *полюсов* сети.

Мы рассматриваем известную задачу о максимальном многопродуктовом потоке в сети $(G, c)$ с потоковой схемой $H$. Нам удобно будет формулировать ее в виде задачи об упаковке цепей. Для $x,y\in V$ пусть $\mathcal{L}(G,xy)$ обозначает множество всех $xy$ - цепей в $G$. Положим $\mathcal{L}=\mathcal{L}(G,H)=\cup(\mathcal{L}(G,st): st\in U)$. Функция $f:\mathcal{L}\to\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ - множество неотрицательных вещественных чисел) называется многопродуктовым потоком, или *мультипотоком*; мультипоток $f$ называется *c - допустимым*, если выполняются ограничения по пропускным способностям

$$(*)\quad \xi^f(e) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum(f(L): L\in\mathcal{L}, e\in EL)\leq c(e),\quad e\in E.$$

*Задача* I. $\mathcal{P}=\mathcal{P}(G,c,H)$: найти $c$ - допустимый мультипоток $f$, имеющий максимальную суммарную мощность

$$l \cdot f = \Sigma(f(L) : L \in \mathscr{L}).$$

Максимум величин $l \cdot f$ по всем $c$ – допустимым $f$ обозначается $v = v(G, c, H)$.

В теории дискретной оптимизации весьма актуальным является вопрос о том, какие массовые задачи имеют допустимые или оптимальные решения ограниченной дробности. В нашем случае это понятие конкретизируется следующим образом. Будем классифицировать задачи $\mathcal{P}(G, c, H)$ по виду схемы $H = (T, U)$. Скажем, что схема $H$ (и массовая задача с этой схемой) *разрешима* в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел и $k \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}$, если для любого графа $G = (V, E)$, $V \supseteq T$, и функции $c : E \to \mathbb{Z}_+$ задача $\mathcal{P}(G, c, H)$ имеет оптимальное решение $f$ такое, что $kf(L)$ – целое для всех $L \in \mathscr{L}(G, H)$, иначе говоря, задача $\mathcal{P}(G, kc, H)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Скажем, что схема $H$ имеет *ограниченную дробность*, если $H$ разрешимо в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$ для некоторого натурального $k$.

Нам понадобятся также следующие понятия. Для $X \subseteq V$ множество ребер в $G$ с одним концом в $X$ и другим в $V - X$ обозначается $\partial X = \partial^G X$ и называется разрезом в $G$ (мы допускаем $X = \emptyset$ или $X = V$). Функцию $c$ назовем *внутренне четной*, если она целочисленная и величина $c(\partial X)$ четна для любого $X \subseteq V - T$ (для произвольных $g : E \to \mathbb{R}$ и $E' \subseteq E$ через $g(E')$ обозначается величина $\Sigma(g(e) : e \in E')$). Скажем, что схема $H$ *разрешима в* $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$ *при условии внутренней четности*, если для любого графа $G = (V, E)$, $V \supseteq T$, и внутренне четной функции $c$ на $E$ задача $\mathcal{P}(G, kc, H)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Ясно, что если $H$ разрешимо в $\frac{1}{k}\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности, то оно разрешимо в $\frac{1}{2k}\mathbb{Z}_+$.

По классической теореме Форда и Фалкерсона $H$ разрешимо в $\mathbb{Z}_+ = \frac{1}{1}\mathbb{Z}_+$ при $|U| = 1$ (в этом случае мы имеем обычную задачу о максимальном потоке в неориентированной сети); этот факт легко обобщается на произвольные полные двудольные графы $H$. Можно показать, что если $H$ не является полным графом, то $H$ не разрешимо в $\mathbb{Z}_+$. Хорошо известна разрешимость в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ схемы с двумя ребрами (теорема Хью о полуцелочисленных двухпродуктовых потоках [2]) и схемы, являющейся полным двудольным графом с произвольным числом вершин [3, 4, 5]. Это усилено, соответственно, в работах [6] и [4], где для указанных схем была доказана разрешимость в $\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности. В [7] была



установлена разрешимость в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ некоторых схем, представимых в виде объединения двух полных двудольных графов. Наконец, в [8] были найдены широкие, обобщающие все ранее известные классы схем, разрешимых в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ и $\frac{1}{4}\mathbb{Z}_+$. Эти классы определяются в терминах семейства $\mathcal{A} = \mathcal{A}(H)$ всех антиклик графа $H$ (*антикликой* графа называется максимальное по включению независимое, т. е. порождающее пустой подграф, подмножество его вершин).

*Определения.* Семейство антиклик $\mathcal{A}$ называется *двудольным*, если существует его разбиение $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, в котором каждое $\mathcal{A}_i$ состоит из попарно не пересекающихся антиклик. Семейство $\mathcal{A}$ называется *3-незацепленным*, если в нем нет трех попарно пересекающихся антиклик. Семейство называется *совершенным*, если для любых трех различных антиклик $A, B, C$ таких, что $A \cap B \ne \emptyset$, $B \cap C \ne \emptyset$, $C \cap A \ne \emptyset$, справедливо $A \cap B = B \cap C = C \cap A$.

Каждый следующий из указанных трех классов семейств включает предыдущий как собственное подмножество. Например: а) если $H$ содержит только два ребра или является полным графом, то $\mathcal{A}$ двудольное; б) если $H$ является циклом длины 5, то $\mathcal{A}$ 3-незацепленное, но не двудольное; в) если $H$ состоит из треугольника и смежного с ним ребра, то $\mathcal{A}$ совершенное, но не 3-незацепленное; если $H$ состоит из трех попарно не смежных ребер, то $H$ несовершенное.

В [8] утверждалось: (i) если $\mathcal{A}$ двудольное, то $H$ разрешимо в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$; (ii) если $\mathcal{A}$ 3-незацепленное, то $H$ разрешимо в $\frac{1}{4}\mathbb{Z}_+$. Доказательство (i) следовало из псевдополиномиального алгоритма, решающего задачу $\mathcal{P}(G, c, H)$ при целочисленном $c$ и двудольном $\mathcal{A}(H)$ (число действий этого алгоритма оценивается полиномом от $|V|$ и $|T|$, умноженным на $c(E)$). Утверждение (ii) следовало из эффективной конструкции, сводящей задачу $\mathcal{P}(G, c, H)$ с 3-незацепленным $\mathcal{A}(H)$ к задаче $\mathcal{P}(G', c', H')$ с двудольным $\mathcal{A}(H')$, при этом каждому допустимому решению второй задачи соответствует допустимое решение первой задачи вдвое большей дробности. Подробности доказательства (i) и (ii) приведены в [9, п. 5]. Наконец, недавно автор получил полное описание класса схем ограниченной дробности, доказав, что таковыми являются схемы $H$ с совершенным $\mathcal{A}(H)$ и только они (более того, оказалось, что если $\mathcal{A}(H)$ совершенное, то $H$ разрешимо в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности).

В настоящей работе дается доказательство теоремы, усиливающей результат в [8] для двудольных семейств, а также полиномиальный алгоритм решения соответствующей задачи; краткие схемы доказательства и алгоритма были приведены в [I].

Т е о р е м а I. Если семейство $\mathscr{A}(H)$ двудольное и функция $c$ внутренне четная, то задача $\mathscr{P}(G,c,H)$ имеет целочисленное оптимальное решение (иначе говоря, всякая схема $H$ с двудольным $\mathscr{A}$ разрешима в $\mathbb{Z}_+$ при условии внутренней четности).

Доказательство теоремы I – неконструктивное и делится на две части. В разделе 2 устанавливается специальный вид оптимального двойственного решения (теорема 2.I.), этот результат следует из алгоритма в [8], но здесь мы дадим его прямое и существенно более короткое доказательство. Используя этот факт, мы показываем в разделе 3, что сеть $(G,c)$ может быть последовательно редуцирована к простейшей сети, для которой существование целочисленного оптимального решения будет очевидно, и тем самым докажем теорему I. Наконец, в разделе 4 будет описан полиномиальный алгоритм решения задачи $\mathscr{P}(G,c,H)$ с двудольным $\mathscr{A}(H)$ как при внутренне четном $c$ (с требованием целочисленности решения), так и при $c: E \to \mathbb{R}_+$. Число действий алгоритма – $O(n^3\sigma(tn))$, где $n=|V|$, $t=|T|$ и $\sigma(n')$ – трудоемкость нахождения максимального потока в сети $n'$ вершинами. В отличие от алгоритма в [8], этот алгоритм основан на декомпозиции сети, а не на прямом построении максимального мультипотока.

## 2. Минимальные правильные семейства

В дальнейшем для $\mathscr{P}(G,c,H)$, $v(G,c,H)$, $\mathscr{A}(H)$ и $\mathscr{L}(G,H)$ будем применять сокращенные обозначения $\mathscr{P}(c)$, $v(c)$, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{L}$. Пусть $c: E \to \mathbb{R}_+$, $\mathscr{A}$ – двудольное семейство и $\{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2\}$ – его разбиение ($A \cap B = \emptyset$ для любых различных $A,B \in \mathscr{A}_i$, $i=1,2$).

Семейство $\mathfrak{X}=\{X_A : A \in \mathscr{A}\}$ назовем п о л у п р а в и л ь н ы м, если $(i)$ $X_A \subset V$ и $X_A \cap T \subseteq A$ для каждого $A \in \mathscr{A}$ (допускается $X_A = \emptyset$) и $(ii)$ каждый полюс $s \in T$ принадлежит ровно одному множеству $X_A \in \mathfrak{X}$. Полуправильное семейство $\mathfrak{X}$, состоящее из попарно не пересекающихся множеств, называется п р а в и л ь н ы м. Определим пропускную способность $c(\mathfrak{X})$ полуправильного семейства $\mathfrak{X}$ как $\frac{1}{2}\sum(c(\partial X_A) : A \in \mathscr{A})$.

Т е о р е м а 2.I. $v(c)$ равно минимуму величин $c(\mathfrak{X})$ по всем полуправильным семействам $\mathfrak{X}$, причем минимум достигается на некотором правильном семействе.



Доказательство состоит из ряда утверждений. Пусть $f: \mathscr{L} \to \mathbb{R}_+$ – некоторый оптимальный мультипоток, и пусть $\mathscr{L}^+(f)$ обозначает множество $\{L \in \mathscr{L} : f(L) > 0\}$. Скажем, что подмножество $X \subseteq V$ н а с ы щ е н о $f$, если $\xi^f(e) = c(e)$ для каждого $e \in \partial X$ (т.е. $f$ насыщает каждое ребро разреза $\partial X$), $X$ с о г л а с о в а н о с $L \in \mathscr{L}$, если $|\partial X \cap EL| \leq 1$, и $X$ с о г л а с о в а н о с $f$, если оно согласовано с каждой цепью в $\mathscr{L}^+(f)$. Из определения полуправильного семейства $\mathfrak{X}$ следует, что для любого $st \in \mathcal{U}$ существуют и единственны множества $X_A, X_B \in \mathfrak{X}$ такие, что $s \in X_A \not\ni t$ и $s \notin X_B \ni t$. Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

(2.2) Для любого полуправильного семейства $\mathfrak{X}$ справедливо $c(\mathfrak{X}) \geq v(c)$, и равенство выполняется в том и только в том случае, когда каждое множество $X_A \in \mathfrak{X}$ насыщено и согласовано с $f$.

Две пересекающиеся антиклики будем называть с м е ж н ы м и. Будем говорить, что $s \in T$ является I - п о л ю с о м (2- п о л ю с о м), если $s$ принадлежит ровно одной(двум) антикликам. Для полюсов $s$ и $t$ (не обязательно различных) будем применять обозначение $s \sim t$, если $s,t \in A \cap B$ для некоторых смежных антиклик $A$ и $B$, и обозначение $s \not\sim t$ – в противном случае. В частности, $s \sim s$, если $s$ – 2-полюс, и $s \not\sim s$, если $s$ – I-полюс. Из 3-незацепленности $\mathscr{A}$ тривиально следует

(2.3) Пусть $A,B \in \mathscr{A}$. $(i)$ Если $s,t \in A$, $s \not\sim t$, $p \in T-A$, то по крайней мере одно из ребер $sp$ и $tp$ принадлежит $\mathcal{U}$. $(ii)$ Если $st \in \mathcal{U}$ и $s' \sim s$, то $s't \in \mathcal{U}$. $(iii)$ Если $A$ и $B$ смежны и либо $s \in A \cap B$, $t \in T-(A \cup B)$, либо $s \in A-B$, $t \in B-A$, то $st \in \mathcal{U}$.

Пусть $\ell: E \to \mathbb{R}_+$ – оптимальное решение задачи $\mathscr{P}^*(c)$, двойственной к $\mathscr{P}(c)$ (рассматриваемой как задача линейного программирования), т.е. $\ell(EL) \geq 1$ для всех $L \in \mathscr{L}$ и $\sum(c(e)\ell(e) : e \in E) = v(c)$. Для произвольных $x,y \in V$ положим $\mu(xy) = \min\{\ell(EL) : L \in \mathscr{L}^{xy}\}$, т.е. $\mu$ – метрика, устанавливающая расстояния в графе $G$ с длинами ребер $\ell$ (если $x=y$, то $\mu(xy)=0$, и если $x$ и $y$ принадлежат разным компонентам связности в $G$, то $\mu(xy)=\infty$). Тогда $\mu(st) \geq 1$ для любого $st \in \mathcal{U}$, и из теоремы о дополняющей нежесткости линейного программирования, примененной к $\mathscr{P}(c)$, $\mathscr{P}^*(c)$, следует

$$(*) \qquad e \in E,\ \xi^f(e) < c(e) \Rightarrow \ell(e) = 0;$$

$$(**) \qquad L \in \mathscr{L}^+(f) \Rightarrow \ell(EL) = 1 (\Rightarrow \mu(st) = 1, \text{ где } s \text{ и } t \text{ концы } L).$$

Для $A \in \mathcal{A}$ и $x \in V$ определим величины

$$\tau_A(x) = \min\{\mu(sx) : s \in A\};$$

$$d_A(x) = \min\{\mu(sx) + \mu(xt) : s,t \in A,\ s \not\sim t\}.$$

Положим

$$X_A^* = Y_A = \{x \in V : d_A(x) < \tfrac{1}{2}\} \qquad \text{для } A \in \mathcal{A}_1;$$

$$Y_A = \{x \in V : d_A(x) \leq \tfrac{1}{2}\},\ R_A = \{x \in V : \tau_A(x) = 0\},$$

$$W_A = R_A \cap \{x \in V : d_B(x) \geq \tfrac{1}{2}\ \ \forall B \in \mathcal{A} - \{A\}\},\ X_A^* = Y_A \cup W_A \qquad \text{для } A \in \mathcal{A}_2;$$

и $\mathfrak{X}^* = \{X_A^* : A \in \mathcal{A}\}$. Наша цель – показать, что $\mathfrak{X}^*$ – правильное семейство, каждое множество которого насщено и согласовано с $f$, откуда, ввиду (2.2), будет следовать $c(\mathfrak{X}^*) = v(c)$, что и докажет теорему. Для полюсов $s$ и $t$ (не обязательно различных) положим $\tau(st) = 1$, если $st \in \mathcal{U}$, и $\tau(st) = 0$ – иначе. Для полюсов $s, t, p, q$ (не обязательно различных) положим

$$\tau(s,t,p,q) = \max\{\tau(st) + \tau(pq), \tau(sp) + \tau(tq), \tau(sq) + \tau(tp)\}.$$

(2.4.) (i) Если $\tau(s,t,p,q) = 0$, то $s,t,p,q \in A$ для некоторого $A \in \mathcal{A}$. (ii) Если $\tau(s,t,p,q) = 1$, то найдется $A \in \mathcal{A}$, содержащее ровно три полюса из $s,t,p,q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) следует из того, что никакие два полюса из $s,t,p,q$ не образуют ребра в $H$ (иначе было бы $\tau(s,t,p,q) \geq 1$). (ii). Очевидно, каждая антиклика содержит не более трех элементов из $s, t, p, q$. С точностью до перестановки $s, t, p, q$ возможны два случая: 1) $\tau(st), \tau(sp), \tau(tp) = 0$ и 2) $\tau(st), \tau(sp), \tau(sq) = 0$. В первом случае $s, t, p$ принадлежит некоторой антиклике. Во втором – каждая пара из $\{s,t\}, \{s,p\}, \{s,q\}$ принадлежит некоторой антиклике, и из 3-незацепленности $\mathcal{A}$ следует, что некоторые две из них совпадают, откуда получаем требуемое. □

(2.5) Для любых $s,t,p,q \in T$ и $x \in V$ справедливо $\mu(sx) + \mu(tx) + \mu(px) + \mu(qx) \geq \tau(s,t,p,q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любых $s', t' \in T$ справедливо $\mu(s't') \geq \tau(s't')$. Пусть для определенности $\tau(s,t,p,q) = \tau(st) + \tau(pq)$. Тогда требуемое неравенство следует из $\mu(sx) + \mu(xt) \geq \mu(st)$ и $\mu(px) + \mu(xq) \geq \mu(pq)$. □

(2.6) Пусть $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$ и $x \in V$. Тогда: (i) $d_A(x) + d_B(x) \geq 2$, если $A \cap B = \emptyset$; (ii) $d_A(x) + d_B(x) \geq 1$, если $A$ и $B$ смежны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s,t \in A$ и $p,q \in B$ таковы, что $s \not\sim t$, $p \not\sim q$, $d_A(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$ и $d_B(x) = \mu(px) + \mu(xq)$. Ввиду (2.5), $d_A(x) + d_B(x) \geq \tau(s,t,p,q)$. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Если $\tau(s,t,p,q) \leq 1$, то ввиду (2.4), найдется антиклика $A'$, содержащая по крайней мере три элемента из $s, t, p, q$, скажем $s,t,p \in A'$.



Тогда $A \neq A'$ и $s,t \in A \cap A'$, вопреки $s \not\sim t$. Пусть теперь $A$ и $B$ смежны. Из $s \not\sim t$ и $p \not\sim q$ следует, что не существует антиклики $A'$, содержащей все $s, t, p, q$. Отсюда, ввиду (2.4), $\tau(s,t,p,q) \geq 1$. □

(2.7) Пусть $A$ и $B$ – две различные антиклики и $x \in V$. Тогда: (i) если $\tau_A(x) + d_B(x) < 1$, то $A$ и $B$ смежны и из $p \in A$, $\mu(px) = \tau_A(x)$ следует $p \in A \cap B$; (ii) если $A \cap B = \emptyset$ и $\tau_A(x) + \tau_B(x) < 1$, то существует антиклика $C$, смежная как $A$, так и $B$ и такая, что $d_C(x) \leq \tau_A(x) + \tau_B(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Пусть $s, t \in B$, $s \not\sim t$ и $d_B(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$. Поскольку $\mu(sp) \leq \tau_A(x) + d_B(x) < 1$, то $sp \notin \mathcal{U}$. Аналогично, $tp \notin \mathcal{U}$. Пусть $B'$ – антиклика, содержащая $s, t, p$. Из $s \not\sim t$ и 3-незацепленности $\mathcal{A}$ следует $B' = B$. (ii). Пусть $s \in A$, $t \in B$, $\tau_A(x) = \mu(sx)$, $\tau_B(x) = \mu(tx)$. Тогда $\mu(st) < 1$ и, следовательно, $st \notin \mathcal{U}$; пусть $C$ – антиклика, содержащая $s$ и $t$. Из 3-незацепленности $\mathcal{A}$ следует, что $C$ определяется единственным образом, откуда $s \not\sim t$ и $d_C(x) \leq \mu(sx) + \mu(xt)$. □

Из (2.6) следует $Y_A \cap Y_B = \emptyset$ для любых различных $A, B \in \mathcal{A}$. Далее, пусть $A \in \mathcal{A}_2$ и $x \in R_A$. Из определения $W_A$ следует, что для произвольного $B' \in \mathcal{A}_1$ не может быть одновременно $x \in W_A$ и $x \in Y_{B'}$, а из (2.7) (i) следует, что $d_{B''}(x) \geq 1$ для любого $B'' \in \mathcal{A}_2 - \{A\}$. Следовательно, $W_A \cap Y_B = \emptyset$ для любого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$. Далее, если $\tau_B(x) = 0$ для некоторого $B \in \mathcal{A}_2 - \{A\}$, то, согласно (2.7) (ii), найдется антиклика $C \in \mathcal{A}$, для которой $d_C(x) = 0$, откуда $x \notin W_A, W_B$. Таким образом, $\mathfrak{X}^*$ состоит из попарно не пересекающихся множеств. Рассмотрим произвольный полюс $s$. Если $s$ – 1-полюс и $s \in A$, то $s \not\sim s$ и $d_A(s) = \mu(ss) + \mu(ss) = 0$, поэтому $s \in Y_A$. Пусть $s$ – 2-полюс и $s \in A \in \mathcal{A}_2$. Тогда $\tau_A(s) = \mu(ss) = 0$, и если $s \notin W_A$, то $d_B(s) < \frac{1}{2}$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, откуда, учитывая (2.7) (i), получаем $s \in A \cap B$. Следовательно, всякий полюс $s$ принадлежит ровно одному множеству $X_C^* \in \mathfrak{X}^*$, и при этом $s \in C$. Таким образом, $\mathfrak{X}^*$ – правильное семейство.

Осталось доказать, что каждое множество в $\mathfrak{X}^*$ насыщено и согласовано с $f$. Воспользуемся соотношениями (*) и (**). Следующее утверждение тривиально.

(2.8) Пусть $x, y \in V$, $\mu(xy) = 0$ и $A \in \mathcal{A}$. Тогда: (i) если $x \in Y_A$, то $y \in Y_A$; (ii) если $x \in W_A$, то $y \in W_A$.

Для $A \in \mathcal{A}$ и $xy \in \partial X_A^*$ из (2.8) получаем $\mu(xy) > 0$ и, следовательно, $\ell(xy) > 0$, откуда, ввиду (*), ребро $xy$ насыщено $f$.

Таким образом, $X^*_A$ насыщено $f$. Для доказательства согласованности $X^*_A$ с $f$ рассмотрим произвольную $pq$ – цепь $L \in \mathcal{L}^+(f)$ и предположим, что имеется вершина $x \in VL$, содержащаяся в $X^*_A$. Пусть, для определенности, $q \notin A$, и пусть $L'$ и $L''$ – отрезки $L$ от $p$ до $x$ и от $x$ до $q$, соответственно. Согласно (**) мы имеем $\ell(EL) = \ell(EL') + \ell(EL'') = \mu(pq) = 1$. Надо показать, что $VL' \subseteq X^*_A$.

1. Предположим, что $x \in Y_A$. Возьмем $s, t \in A$, $s \nsim t$, для которых $d_A(x) = \mu(sx) + \mu(xt)$. Тогда $\mu(sx) + \mu(tx) + \mu(px) + \mu(qx) \leq 1\frac{1}{2}$, откуда, ввиду (2.5) и (2.4), $\tau(s,t,p,q) = 1$ и найдется антиклика $B$, содержащая элементы $s, t$ и $p' \in \{p, q\}$. Очевидно, $B = A$ (иначе было бы $s \sim t$) и, следовательно, $p' = p$. Согласно (2.3) ($i$) $\{sq, tq\} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Если для некоторого элемента $s' \in \{s, t\}$ имеет место $s' \sim p$, то $s'q \in \mathcal{U}$ (ввиду (2.3) ($ii$)) и $t' \nsim p$, где $\{s', t'\} = \{s, t\}$. Таким образом, мы можем считать, что $sq \in \mathcal{U}$ и $t \nsim p$. Из $\mu(sx) + \ell(EL'') \geq \mu(sq) \geq 1$ и $\ell(EL) = 1$ получаем $\mu(tx) + \ell(EL') \leq d_A(x)$, поэтому для любой вершины $y \in VL'$ справедливо $\mu(ty) + \mu(yp) \leq d_A(x)$ и, следовательно, $y \in Y_A$.

2. Предположим теперь, что $A \in \mathcal{A}_2$ и $x \in W_A$. Выберем $s \in A$, для которого $\mu(sx) = \tau_A(x) = 0$. Тогда $\mu(sx) + \ell(EL') + \ell(EL'') = 1$. Если $sq \in \mathcal{U}$, то из этого равенства и $\mu(sq) \geq 1$ следует $\mu(sx) + \ell(EL') = 0$, откуда для произвольного $y \in VL'$ имеем $\mu(sy) = 0$ и, ввиду (2.8), $y \in W_A$. Допустим теперь, что $sq \notin \mathcal{U}$, и пусть $B$ – антиклика, содержащая $s$ и $q$; очевидно, $B \neq A$ и $s \nsim q$. Поскольку $x \in W_A$, то $d_B(x) \geq \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\ell(EL'') + \mu(sx) \geq \frac{1}{2}$, откуда $\mu(sp) \leq \mu(sx) + \ell(EL') \leq \frac{1}{2}$. Таким образом, $sp \notin \mathcal{U}$, что, ввиду 3-незацепленности $\mathcal{A}$, влечет $p \in A$. Но из $pq \in \mathcal{U}$ следует $s \nsim p$ (иначе было бы $sq \in \mathcal{U}$, вопреки $s, q \in B$), и для произвольного $y \in VL'$ мы получаем $d_A(y) \leq \mu(sy) + \mu(yp) \leq \frac{1}{2}$, т.е. $y \in Y_A$.

Этим завершается доказательство теоремы 2.1.

(2.9) С л е д с т в и е. Если функция $c$ внутренне четная, то для любого полуправильного семейства $\mathcal{X}$ величина $c(\mathcal{X})$ целая (и, следовательно, величина $\upsilon(c)$ тоже целая).

Действительно, пусть $A \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{X}'$ – правильное семейство, состоящее из множеств $X'_A = X_A \cup (V - T)$ и $X'_B = X_B \cap T$ $(B \in \mathcal{A} - \{A\})$. Из внутренней четности $c$ следует $c(\partial X'_C) \equiv c(\partial X_C) \pmod 2$ для любого $C \in \mathcal{A}$ (учитывая $X'_C \cap T = X_C \cap T$), поэтому величина $c(\mathcal{X}') - c(\mathcal{X})$ – целая. Поскольку $\mathcal{X}'$ является разбиением



множества $V$, каждое ребро $e \in E$ встречается в четном числе разрезов $\partial X'_C$, $C \in \mathcal{A}$, откуда получаем, что $c(\mathcal{X}')$ –целое.

## 3. Декомпозиция сети

В этом разделе завершается доказательство теоремы I. Нам будет удобно считать, что граф $G$ полный, т.е. $xy \in E$ для любых различных $x, y \in V$ (если в исходном графе $G$ отсутствует какое-либо ребро $xy$, добавим его, положив $c(xy) = 0$). Пусть $c$ – внутренне четная функция.

Полуправильное семейство $\mathcal{X}$, для которого $c(\mathcal{X}) = \upsilon(c)$, назовем $c$ – м и н и м а л ь н ы м. Обозначим через $\mathcal{M}(c)$ множество всех $c$ –минимальных п р а в и л ь н ы х семейств. Доказательство теоремы проводится по индукции. А именно, будем, предполагать, что при фиксированных $G$ и $H$ теорема верна для всех внутренне четных функций $c'$ таких, что либо $|\mathcal{M}(c')| > |\mathcal{M}(c)|$, либо $|\mathcal{M}(c')| = |\mathcal{M}(c)|$ и $c'(E) < c(E)$. Теорема очевидна при $c = 0$ (заметим, что в этом случае всякое правильное семейство является $c$ –минимальным, т.е. $|\mathcal{M}(c)|$ максимально возможное).

Пусть $f$, как и прежде, обозначает некоторое оптимальное решение задачи $\mathcal{P}(G, c, \mathcal{U})$. Тройку вершин $xyz$, в которой $y \neq x, z$, а $x$ и $z$ могут совпадать, назовем в и л к о й функции $c$, если $c(xy) > 0$ и $c(yz) > 0$. Для вилки $xyz$ определим функцию $\theta = \theta_{xyz}$ на $E$ как: 1) $\theta(xy) = 2$ и $\theta(e) = 0$ $(e \in E - \{xy\})$, если $x = z$, и 2) $\theta(xy) = \theta(yz) = 1$, $\theta(xz) = -1$ и $\theta(e) = 0$ $(e \in E - \{xy, yz, xz\})$, если $x \neq z$. Вилку $xyz$ назовем с у щ е с т в е н н о й (относительно $f$), если $x \neq z$ и в множестве $\mathcal{L}^+(f)$ найдется цепь, содержащая оба ребра $xy$ и $yz$.

(3.1) Пусть $xyz$ – вилка и $c' = c - \theta_{xyz}$. Тогда: ($i$) функция $c'$ – внутренне четная; ($ii$) $\upsilon(c) \geq \upsilon(c') \geq \upsilon(c) - 2$; ($iii$) если $\upsilon(c') = \upsilon(c)$, то $\mathcal{M}(c') \supseteq \mathcal{M}(c)$; ($iv$) если вилка $xyz$ – существенная и $\mathcal{X} = \{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ – такое правильное семейство, что $c'(\mathcal{X}) < \upsilon(c)$, то $c'(\mathcal{X}) = \upsilon(c) - 1$, $c(\mathcal{X}) = \upsilon(c) + 1$, и имеются $X_A, X_B \in \mathcal{X}$, для которых $y \notin X_A \ni x, z$ и $x, z \notin X_B \ni y$ (откуда, в частности, следует, что либо $\upsilon(c') = \upsilon(c)$ либо $\upsilon(c') = \upsilon(c) - 1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. ($i$) очевидно. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное правильное семейство. Согласно (2.9), величины $c(\mathcal{X})$ и $c'(\mathcal{X})$ – целые. Для всякого $X_C \in \mathcal{X}$ мы имеем $c'(\partial X_C) = c(\partial X_C) - 2$, если $xy, yz \in \partial X_C$, и $c'(\partial X_C) = c(\partial X_C)$ – в остальных случаях. Поскольку множества в $\mathcal{X}$ попарно не пересекаются, то в $\mathcal{X}$ имеется не более двух множеств $X_C$, для которых $xy, yz \in \partial X_C$, и следовательно, $c(\mathcal{X}) \geq c'(\mathcal{X}) \geq c(\mathcal{X}) - 2$. Отсюда получаем (ii) и (iii). Пусть теперь $xyz$ и $\mathcal{X}$ определены как в (iv), и пусть $X_C \in \mathcal{X}$ – такое множество, что $xy, yz \in \partial X_C$. Тогда $X_C$ не согласовано с $f$ и, ввиду (2.2), $\mathcal{X}$ не является $c$-минимальным. Отсюда легко получаем (iv). □

Пусть $K(f)$ обозначает множество существенных вилок для $f$. Если $K(f) = \emptyset$ (т.е. $|EL| = 1$ для всех $L \in \mathcal{L}^+(f)$), то, очевидно, мультипоток $f$ – целочисленный. Таким образом, мы можем далее считать, что $K(f) \neq \emptyset$. Вилку $xyz$ назовем о т д е л я е м о й, если $v(c') = v(c)$, где $c' = c - \theta_{xyz}$. Наша цель состоит в том, чтобы доказать существование отделяемой вилки. В предположении, что этот факт нами доказан, доказательство теоремы I завершается следующим образом. Пусть $xyz$ – отделяемая вилка и $c' = c - \theta_{xyz}$. Поскольку $c'(E) < c(E)$ и $\mathcal{M}(c') \supseteq \mathcal{M}(c)$ (ввиду (3.I) (iii)), то по индукции задача $\mathcal{P}(c')$ имеет целочисленное оптимальное решение $f'$. Если $x = z$ либо $x \neq z$ и $\xi^{f'}(xz) \leq c(xy)$, то, очевидно, $f'$ – оптимальное решение для $\mathcal{P}(c)$. Если $x \neq z$ и $\xi^{f'}(xz) = c(xz) + 1\ (= c'(xz))$, положим $f^*(L) = f'(L) - 1$, $f^*(L') = f'(L') + 1$ и $f^*(L'') = f'(L'')\ (L'' \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, где $L$ – некоторая цепь в $\mathcal{L}^+(f')$, содержащая ребро $xz$ и $L'$ – цепь в $\mathcal{L}$, для которой $EL' \subseteq (EL - \{xz\}) \cup \{xy, yz\}$. Очевидно, мультипоток $f^*$ $c$-допустимый, и $1 \cdot f^* = 1 \cdot f' = v(c)$, таким образом, $f^*$ – оптимальное целочисленное решение задачи $\mathcal{P}(c)$.

Приступим к доказательству существования отделяемой вилки. Мы можем далее считать, что никакая существенная вилка не является отделяемой. Надо показать, что тогда обязательно найдется отделяемая несущественная вилка. Выберем некоторую существенную вилку $xyz$ и положим $c' = c - \theta_{xyz}$, $c'' = c - \frac{1}{2}\theta_{xyz}$ и $\tilde{c} = 2c''$. Для любого правильного семейства $\mathcal{X}$ справедливо $c''(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}(c(\mathcal{X}) + c'(\mathcal{X}))$, откуда, ввиду (3.I) (iv), мы получаем следующее: 1) $v(c'') = v(c)$; 2) если $c(\mathcal{X}) = v(c)$, то $c''(\mathcal{X}) = v(c'')$; 3) если $c'(\mathcal{X}) = v(c')\ (= v(c) - 1)$, то $c(\mathcal{X}) > v(c)$ и $c''(\mathcal{X}) > v(c'')$. Таким образом, $\mathcal{M}(\tilde{c}) = \mathcal{M}(c'') \supset \mathcal{M}(c)$. Так как функция $\tilde{c}$, очевидно, внутренне четная, то по предположению индукции задача $\mathcal{P}(\tilde{c})$ имеет целочисленное оптимальное решение $\tilde{f}$. Поскольку $\tilde{c} = 2c - \theta_{xyz}$, и для функции $2c$ вилка $xyz$ является отделяемой, то указанным выше способом мультипоток $\tilde{f}$ можно перестро-



ить в $2c$-допустимый целочисленный мультипоток $\tilde{f}^*$ с $1 \cdot \tilde{f}^* = 1 \cdot \tilde{f}$. Таким образом, задача $\mathcal{P}(2c)$ имеет целочисленное оптимальное решение, и, следовательно, задача $\mathcal{P}(c)$ имеет п о л у ц е л о ч и с л е н н о е оптимальное решение.

Итак, мы можем считать, что $f$ принимает значения в $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$. Будем предполагать также, что среди всех полуцелочисленных оптимальных решений задачи $\mathcal{P}(c)$ мультипоток $f$ имеет минимальную величину $\xi^f(E)$. Для существенной вилки $xyz$ правильное семейство $\mathcal{X}$, указанное в (3.I) (iv), будем называть к р и т и ч е с к и м, а $X_A$ и $X_B$ – соответственно, в н е ш н и м и в н у т р е н н и м множествами (относительно $xyz$).

(3.2) Пусть $xyz$ – существенная вилка, $\mathcal{X}$ – правильное семейство, критическое для $xyz$, $X_A, X_B \in \mathcal{X}$ – соответственно, внешнее и внутреннее множества и $L \in \mathcal{L}^+(f)$ – цепь, содержащая ребра $xy$ и $yz$. Тогда: (i) каждое множество $X_C \in \mathcal{X}$ насыщено $f$; (ii) каждое множество $X_C \in \mathcal{X} - \{X_A, X_B\}$ согласовано с $f$; (iii) множества $X_A$ и $X_B$ согласованы с каждой цепью в $\mathcal{L}^+(f) - \{L\}$; (iv) $|EL \cap \partial X_A| = 3$; (v) $f(L) = \frac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $c' = c - \frac{1}{2}\theta_{xyz}$ и определим мультипоток $f'$ как $f'(L) = f(L) - \frac{1}{2}$, $f'(L') = f(L') + \frac{1}{2}$, $f'(L'') = f(L'')\ (L'' \in \mathcal{L} - \{L, L'\})$, где $L'$ – цепь в $\mathcal{L}$, для которой $EL' = (EL - \{xy, yz\}) \cup \{xz\}$. Тогда $v(c) = v(c') = c'(\mathcal{X})$ и $f'$ – оптимальное решение для $\mathcal{P}(c')$. Теперь (i), (ii), (iii) и (v) легко следуют из (2.2), примененного к $c', f'$ и $\mathcal{X}$. Наконец, $|EL' \cap \partial X_A| = 1$ (так как $VL' \cap X_A \neq \emptyset$), откуда $|EL \cap \partial X_A| = |EL' \cap \partial X_A| + 2 = 3$. □

Пусть $\hat{V}$ – множество вершин $y \in V$, для которых имеется хотя бы одна существенная вилка $xyz$. Рассмотрим некоторую вершину $y \in \hat{V}$ и существенную вилку $xyz$. Из (3.2) (iii) следует, что в $\mathcal{L}^+(f)$ имеется единственная цепь $L$, содержащая оба ребра $xy$ и $yz$. Поскольку $f(L) = \frac{1}{2}$, и ребро $xy$ насыщено $f$, то верно по крайней мере одно из двух: 1) найдется существенная вилка $x'yz$, $x' \neq z$; 2) ребро $xy$ принадлежит цепи $L' \in \mathcal{L}^+(f)$ с одним концом в $y$ (и, в частности, $y$ является полюсом). Отсюда нетрудно заключить, что должна иметь место хотя бы одна из двух ситуаций:

(c1) в $G$ есть вершина $y$ и различные вершины $x_1, x_2, \ldots, x_k = x_0$ $(k \geq 3)$ такие, что для каждого $i = 1, \ldots, k$ $x_i y x_{i+1}$ – существенная вилка;

(c2) $\hat{V} \subseteq T$ и для некоторых $s \in T$ и $x, z \in V$ имеется цепь

$\in \mathcal{L}^+(f)$, содержащая ребра $xs$ и $sz$, и $st$ – цепь $L' \in \mathcal{L}^+(f)$ содержащая ребро $sx$.

Покажем, что в действительности ситуация (c2) невозможна. Воспользуемся следующим утверждением.

(3.3) Пусть $L \in \mathcal{L}^+(f)$ – $pq$ – цепь, и $T' = T \cap (VL - \{p,q\}) \neq \emptyset$. Тогда $T' \subseteq A \cap B$ для некоторых различных $A, B \in \mathcal{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из минимальности величины $\xi^f(E)$ следует, что $p'q' \notin \mathcal{U}$ для любой пары $\{p', q'\} \subset VL \cap T$, отличной от $\{p, q\}$ (иначе можно было бы "укоротить" цепь $L$). Выберем $p' \in T'$, и пусть $A$ – антиклика, содержащая $p$ и $p'$, а $B$ – антиклика, содержащая $p'$ и $q$. Пусть $q' \in T' - \{p'\}$. Из $p'q' \notin \mathcal{U}$ и (2.3) (iii) следует $q' \in A \cup B$. Если бы было $q' \notin A$, то, ввиду $pq' \notin \mathcal{U}$, нашлась бы антиклика $C \neq A, B$, содержащая $p$ и $q'$, что противоречило бы 3-незацепленности $\mathcal{A}$. Отсюда $T' \subseteq A \cap B$. □

Рассмотрим $s, x, z, L, L'$, указанные в (c2). Пусть $L$ имеет концы $p$ и $q$, и пусть $X_A$ – внешнее множество правильного семейства, критического для $xsz$. Заметим, что из $V \subseteq T$ следует $x, z \in T$. Поскольку $|EL| \geq |EL \cap \partial X_A| = 3$, то хотя бы один из полюсов $x$ и $z$, скажем $x$, отличен от $p$ и $q$. Из (3.3) и $x \in X_A \cap T \subseteq A$ мы получаем $s \in A$. Пусть $t$ – конец цепи $L'$, отличный от $s$. Поскольку $X_A$ согласовано с $L'$ (из (3.2) (iii)) и $s \notin X_A$, то $t \in X_A$. Таким образом, $L'$ имеет оба конца в антиклике $A$, что невозможно.

Приступим теперь к рассмотрению ситуации (c1), и пусть $y, x_1, \ldots, x_k$ – указанные вершины. Мы покажем, что вилка вида $x_i y x_{i+2}$ является отделяемой. Пусть $\mathcal{X}^i = \{X^i_B : B \in \mathcal{A}\}$ обозначает правильное семейство, критическое для $x_i y x_{i+1}$, $X^i_{A(i)} \in \mathcal{X}^i$ – внешнее множество (относительно $x_i y x_{i+1}$), $T^i = T \cap X^i_{A(i)}$ и $L^i \in \mathcal{L}^+(f)$ – цепь, содержащая ребра $x_i y$ и $y x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k$. Далее индексы берутся по модулю $k$.

(3.4) Для любого $i = 1, \ldots, k$ либо $A(i) = A(i+1)$, либо $A(i)$ смежно $A(i+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $A(i) \cap A(i+1) = \emptyset$. Тогда $T^i \cap T^{i+1} = \emptyset$ и, следовательно, $\mathcal{Y} = (\mathcal{X}^i - \{X\}) \cup \{X - Y\}$ и $\mathcal{Y}' = (\mathcal{X}^{i+1} - \{Y\}) \cup \{Y - X\}$, где $X = X^i_{A(i)}$ и $Y = X^{i+1}_{A(i+1)}$, – правильные семейства. Поскольку внутреннее (относительно $x_i y x_{i+1}$) множество в $\mathcal{X}^i$ не согласовано с $f$, и это множество присутствует в $\mathcal{Y}$, то $c(\mathcal{Y}) \geq v(c) + 1$. Аналогично, $c(\mathcal{Y}') \geq v(c) + 1$. Таким образом, $c(\mathcal{Y}) + c(\mathcal{Y}') \geq c(\mathcal{X}^i) + c(\mathcal{X}^{i+1})$. С другой стороны,



$x_{i+1} y \in \partial X, \partial Y$ и $x_{i+1} y \notin \partial(X - Y), \partial(Y - X)$, и, следовательно, для $X$ и $Y$ выполняется строгое субмодулярное неравенство $c(\partial X) + c(\partial Y) > c(\partial(X - Y)) + c(\partial(Y - X))$, откуда получаем $c(\mathcal{X}^i) + c(\mathcal{X}^{i+1}) > c(\mathcal{Y}) + c(\mathcal{Y}')$. Противоречие. □

Пусть $L[z\,z']$ обозначает отрезок цепи $L$ от $z$ до $z'$, где $z, z' \in VL$. Для $i = 1, \ldots, k$ пусть $s_i$ обозначает тот конец цепи $L^i$, для которого $x_i$ содержится в $L^i[s_i y]$, и пусть $t_i$ – другой конец $L^i$. Из (3.2) (iii), (iv) легко получаем следующее утверждение.

(3.5) Для любого $j = 1, \ldots, k$ справедливо: (i) $t_{j-1}, s_{j+1} \in T^j$, (ii) ровно один из полюсов $s_j$ и $t_j$ принадлежит $T_j$. □

(3.6) Для любого $i = 1, \ldots, k$ по крайней мере один из полюсов $s_{i+1}$ и $t_i$ принадлежит $T^i \cap T^{i+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Из (3.5) (i) (при $j = i+1$ и $j = i$) имеем $t_i \in T^{i+1}$ и $s_{i+1} \in T^i$. Тогда $t_i \notin T^i$ и $s_{i+1} \notin T^{i+1}$, откуда, ввиду (3.5) (ii), $s_i \in T^i$ и $t_{i+1} \in T^{i+1}$. Таким образом, $s_i, s_{i+1} \in A(i)$, $t_i, t_{i+1} \in A(i+1)$, что влечет $A(i) \neq A(i+1)$. Следовательно, $A(i)$ смежно $A(i+1)$ (ввиду (3.4)). Кроме того, из (2.3) (iii) мы получаем $s_i t_{i+1}$, $s_{i+1} t_i \in \mathcal{U}$. Пусть $L$ и $L'$ обозначают, соответственно, $s_i t_{i+1}$ – цепь и $s_{i+1} t_i$ – цепь, для которых $EL \subseteq EL^i[s_i y] \cup EL^{i+1}[y t_{i+1}]$ и $EL' \subseteq EL^{i+1}[s_{i+1} x_{i+1}] \cup EL^i[x_{i+1} t_i]$. Определим мультипоток $f'$ как $f'(L) = f(L) + \frac{1}{2}$, $f'(L') = f(L') + \frac{1}{2}$, $f'(L^i) = f'(L^{i+1}) = 0$ и $f'(L'') = f(L'')$ для остальных цепей $L''$ в $\mathcal{L}$. Очевидно, $1 \cdot f' = 1 \cdot f = v(c)$ и $\xi^{f'}(e) \leq \xi^f(e)$ для каждого $e \in E$. Но $\xi^{f'}(x_{i+1} y) < \xi^f(x_{i+1} y)$ (поскольку цепи $L$ и $L'$ не содержат ребро $x_{i+1} y$), что противоречит минимальности $\xi^f(E)$. □

Пусть, для определенности, $s_1 \in T^1$. Тогда из (3.5) и (3.6) следует, что $s_i \in T^{i-1} \cap T^i$ и $t_i \in T^{i+1} - T^i$, $i = 1, \ldots, k$ (рис. 1). Отсюда и из (3.4) мы получаем, что для любого $i$ справедливо:

(1) $s_i \in A(i-1) \cap A(i)$, $t_i \in A(i+1) - A(i)$;
(2) $A(i)$ смежно $A(i+1)$ (ввиду (3.4) и $s_i \in T^i$, $t_i \in T^{i+1}$);
(3) $A(i) \neq A(i+2)$ (поскольку $s_{i+1} \in T^i$ и $t_{i+1} \in T^{i+2}$);
(4) $A(i) \neq A(i+3)$ (иначе $A(i), A(i+1), A(i+2)$ были бы попарно смежными).

Из (4), в частности, следует, что $k \geq 4$. Кроме того, из (1), (3) и 3-незацепленности $\mathcal{A}$ имеем

(5) $A(i) \cap A(i+2) = \emptyset$.

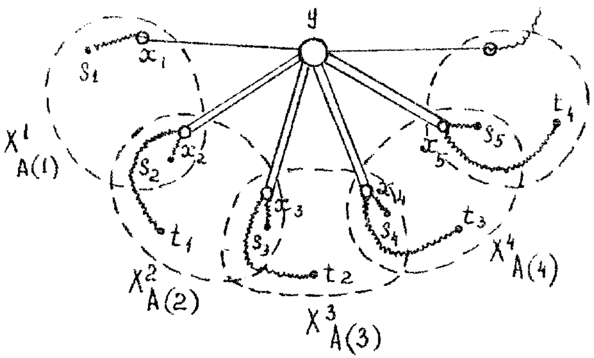


Рис. I

(3.7) Вилка $x_2 y x_4$ является отделяемой.

Доказательство. Из (I) и (5) следует $s_1 \notin A(2), A(3)$ откуда, ввиду (2.3) (iii), $s_1 s_3 \in \mathcal{U}$; пусть $P_1$ – $s_1 s_3$ –цепь, для которой $EP_1 \subseteq EL^1[s_1 y] \cup EL^3[y\, s_3]$. Аналогично, $s_2 s_4 \in \mathcal{U}$. Рассмотрим два случая.

I) $t_1 t_3 \in \mathcal{U}$. Образуем $s_2 s_4$ – цепь $P_2$ и $t_1 t_3$-цепь $P_3$ такие, что $EP_2 \subseteq EL^2[s_2 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^4[x_4 s_4]$ и $EP_3 \subseteq EL^1[t_1 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^3[x_4 t_3]$. 2) $t_1 t_3 \notin \mathcal{U}$. Пусть $B$ – антиклика, содержащая $t_1$ и $t_3$. Из (I) и (5) следует, что $B$ отлично от $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ и $A(4)$. Тогда $t_1$ и $t_3$ – 2-полюсы, $t_3 \notin A(1), A(2)$, $t_1 \notin A(3), A(4)$, и из (2.3) (iii) мы получаем $s_2 t_3 \in \mathcal{U}$ и $t_1 s_4 \in \mathcal{U}$. Образуем $s_2 t_3$ – цепь $P_2$ и $t_1 s_4$ – цепь $P_3$ такие, что $EP_2 \subseteq EL^2[s_2 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^3[x_4 t_3]$ и $EP_3 \subseteq EL^1[t_1 x_2] \cup \{x_2 x_4\} \cup EL^4[x_4 s_4]$. В каждом из двух случаев определим мультипоток $f'$ как $f'(P_j) = f(P_j) + \frac{1}{2}$ $(j = 1,2,3)$, $f'(L^m) = f(L^m) - \frac{1}{2}$ $(=0)$ $(m = 1,2,3,4)$ и $f'(L) = f(L)$ для остальных $L$ в $\mathcal{L}$. Очевидно, $f'$ является $c'$ – допустимым, где $c' = c - \theta x_2 y x_4$, и $v(c') \geq 1 \cdot f' = 1 \cdot f - \frac{1}{2} = v(c) - \frac{1}{2}$. Но величины $v(c)$ и $v(c')$ – целые, поэтому $v(c') = v(c)$. Следовательно, вилка $x_2 y x_4$ – отделяемая. □

Этим заканчивается доказательство теоремы I.

## 4. Алгоритм

В основе алгоритма лежит та же идея декомпозиции сети (отделение вилок), что и в доказательстве теоремы I. Для определения



максимального возможного "веса", с которым может быть отделена очередная вилка, используется процедура построения $c$ – минимального семейства $\mathcal{X}$ (для текущего $c$). Следует заметить, что метод построения такого семейства, данный в разделе 2, является недостаточно эффективным, так как он предполагает решение двойственной задачи $\mathcal{P}^*(c)$. Покажем, что построение $c$ – минимального семейства можно свести к отысканию обычного минимального разреза в некоторой расширенной сети.

Пусть $c: E \to \mathbb{R}_+$. Для каждого $A \in \mathcal{A}$ возьмем копию $G_A = (V_A, E_A)$ графа $G$; пусть $x_A$ обозначает копию вершины $x \in V$ в графе $G_A$. Склеим графы $G_A$, $A \in \mathcal{A}$ между собой, производя следующие отождествления вершин и ребер для каждых двух смежных антиклик $A, B \in \mathcal{A}$: отождествим вершины $x_A$ и $x_B$, если $x \in A \cap B$; отождествим ребра $x_A y_A$ и $x_B y_B$, если $x, y \in A \cap B$ и $xy \in E$. Полученный граф обозначим $\mathcal{G}'$. Сохраним обозначение $G_A$ за соответствующим подграфом графа $\mathcal{G}'$. Пусть $\widetilde{A}$ обозначает множество I-полюсов в антиклике $A$, т.е. $\widetilde{A} = A - \cup(B : B \in \mathcal{A} - \{A\})$. Образуем граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, добавив к $\mathcal{G}'$ вершины $s^\circ$ ("источник"), $t^\circ$ ("сток") и следующие ребра: I) $s^\circ s_A$, где $s \in \widetilde{A}$, $A \in \mathcal{A}_1$; 2) $s^\circ t_A$, где $t \in T - A$, $A \in \mathcal{A}_2$; 3) $t^\circ t_A$, где $t \in T - A$, $A \in \mathcal{A}_1$; 4) $t^\circ s_A$, где $s \in \widetilde{A}$, $A \in \mathcal{A}_2$ (на рис. 2 изображен пример графа $G$, совокупности $\mathcal{A}$ и соответствующего графа $\mathcal{G}$; здесь $\mathcal{A}_1 = \{A = \{s,t\},\ C = \{p,q,r\}\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{B = \{t,p,q\}\}$.

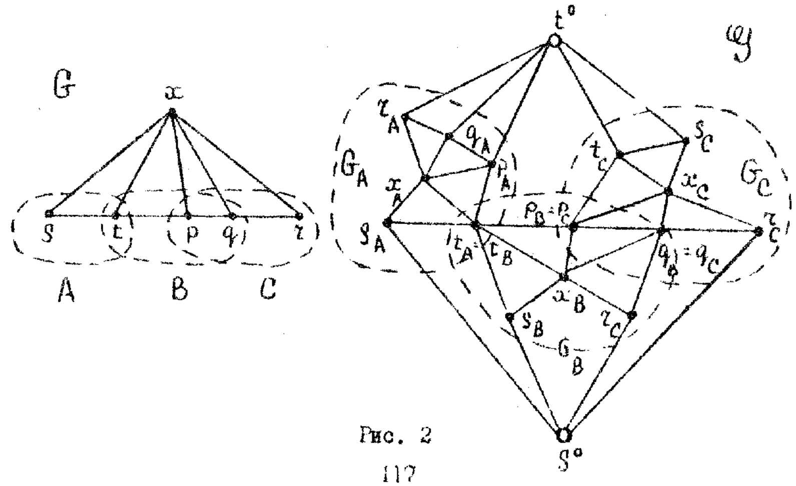


Рис. 2

Для каждого $A \in \mathcal{A}$ обозначим через $\varphi_A$ вложение $G$ в $\mathcal{G}$, при котором $G$ естественно отображается в подграф $G_A$. Зададим пропускные способности $d = d^c$ ребер графа $\mathcal{G}$ следующим образом: пусть $xy \in E$, $A \in \mathcal{A}$ и $e = \varphi_A(xy) \in \mathcal{E}$; тогда, если $x, y \in A \cap B$ для некоторого $B \in \mathcal{A} - \{A\}$, то полагаем $d(e) = 2c(xy)$, в остальных случаях полагаем $d(e) = c(xy)$; для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$, инцидентного $s^\circ$ или $t^\circ$ полагаем $d(e) = \infty$ (легко видеть, что это определение корректно).

Разрез $\partial Z$ графа $\mathcal{G}$ назовем $(s^\circ, t^\circ)$-разрезом, если $s^\circ \in Z \subset \mathcal{V}$ и $t^\circ \notin Z$. Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает множество всех $Z \subset \mathcal{V}$, для которых $\partial Z$ – $(s^\circ, t^\circ)$-разрез, не содержащий ребер, инцидентных $s^\circ$ или $t^\circ$. Для $Z \in \mathfrak{A}$ определим семейство $\omega(Z) = \{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ подмножеств в $V$ как $X_A = \varphi_A^{-1}(Z \cap V_A)$ при $A \in \mathcal{A}_1$ и $X_A = \varphi_A^{-1}(V_A - Z)$ при $A \in \mathcal{A}_2$. Из конструкции графа $\mathcal{G}$ непосредственно вытекает следующее утверждение (аккуратная проверка оставляется читателю).

(4.I) Отображение $\omega$ является биекцией между $\mathfrak{A}$ и множеством всех полуправильных семейств для $G$ и $\mathcal{A}$. При этом для $Z \in \mathfrak{A}$ и $\mathcal{X} = \omega(Z)$ справедливо $d^c(\partial Z) = 2c(\mathcal{X})$.

Таким образом, нахождение $c$-минимального полуправильного семейства $\mathcal{X}$ и величины $v(c) = c(\mathcal{X})$ сводится к построению в графе $\mathcal{G}$ $(s^\circ, t^\circ)$-разреза $\partial Z$ минимальной пропускной способности $d^c(\partial Z)$ (здесь учитывается тот факт, что если $s^\circ \in Z' \not\ni t^\circ$, но $Z' \notin \mathfrak{A}$, то разрез $\partial Z'$ содержит ребро бесконечной пропускной способности, и следовательно, не может быть минимальным $(s^\circ, t^\circ)$-разрезом). Заметим, что при желании из $c$-минимального полуправильного семейства $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ можно получить $c$-минимальное правильное семейство $\{X'_A : A \in \mathcal{A}\}$, положив $X'_A = X_A - \cup\{X_B : B \in \mathcal{A} - \{A\}\}$ (это простое утверждение мы оставляем читателю).

Приступим к описанию алгоритма решения задачи $\mathcal{P}(c)$. Будем различать два случая: I) $c$ принимает значения из $\mathbb{R}_+$, 2) $c$ – внутренне четная функция. В первом случае требуется построить оптимальный мультипоток $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}_+$, а во втором $f : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}_+$. Нам опять будет удобно считать, что граф $G$ полный.

Вначале мы рассматриваем первый случай. Для функции $c' : E \to \mathbb{R}_+$ и тройки вершин $xyz$ $(y \ne x, z)$ пусть $b(c', xyz)$ обозначает максимальное число $a \in \mathbb{R}_+$ такое, что $a \le c'(xy), c'(yz)$ и $v(c' - a\theta_{xyz}) = v(c)$. Алгоритм состоит из о с н о в н о г о и з а к л ю ч и т е л ь н о г о этапов. В начале алгоритма вычисляется число $v(c)$. На основном этапе последовательно перебираются вершины в $G$, и для каждого $y \in V$ последовательно перебираются тройки $xyz$, $xz \in V - \{y\}$ (включая $x = z$), при этом порядок каждого перебора произволен. Обработка очередной вершины $y$ составляет и т е р а ц и ю этапа, а обработка очередной тройки $xyz$ – шаг итерации (таким образом, основной этап состоит из $|V|$ итераций, а каждая итерация – из $\frac{1}{2}|V|(|V|-1)$ (шагов). Обработка тройки $xyz$ заключается в нахождении для текущей функции $c$ числа $b = b(c, xyz)$ и преобразовании $c := c - b\,\theta_{xyz}$. В конце основного этапа для получившейся функции $\tilde{c}$ определяется оптимальное решение $f$ задачи $\mathcal{P}(\tilde{c})$ как $f(L_{st}) = \tilde{c}(st)$ $(st \in U)$, где $L_{st}$ – цепь с $EL_{st} = \{st\}$ ($f$ считается продолженным нулем на остальные цепи в $\mathcal{L}$).

Число $b(c, xyz)$ находится следующим образом. Если $a_0 = \min\{c(xy), c(yz)\} = 0$, то полагаем $b(c, xyz) = 0$. Иначе полагаем $c_0 = c - a_0\theta_{xyz}$ и определяем $v(c_0)$ (для этого, в соответствии с (4.I), в сети $(\mathcal{G}, d^{c_0})$ надо найти величину $q$ максимального потока из $s^\circ$ в $t^\circ$ и положить $v(c_0) = \frac{1}{2}q$). Если $v(c_0) = v(c)$, то полагаем $b(c, xyz) = a_0$. Если же $h_0 = v(c) - v(c_0) > 0$, то полагаем $a_1 = a_0 - \frac{1}{2}h_0$, $c_1 = c - a_1\theta_{xyz}$ и определяем $v(c_1)$. Искомым числом $b(c, xyz)$ в этом случае является $a_1 - h_1$, где $h_1 = v(c) - v(c_1)$.

Дадим обоснование основного этапа. Прежде всего заметим, что в процессе этапа величина $v(c)$ (для текущих $c$) не изменяется. Докажем правильность нахождения чисел $b(c, xyz)$ и тот факт, что для любой тройки $xyz$ в результате основного этапа станет $b(\tilde{c}, xyz) = 0$. Для произвольных $y \in V$, $x, z \in V - \{y\}$, $a \in \mathbb{R}_+$ и правильного семейства $\mathcal{X}$ справедливо $c'(\mathcal{X}) = c(\mathcal{X}) - ak$, где $c' = c - a\theta_{xyz}$ и $k = k(\mathcal{X}, xyz)$ – число таких $X_A \in \mathcal{X}$, что $xy, yz \in X_A$; при этом $k$ может быть равно только 0, I или 2. Таким образом,

(ж) $b(c, xyz) = \min\{c(xy), c(yz), \min\{\Delta(\mathcal{X}) : \mathcal{X} \in \mathcal{K}\}\}$,

где $\mathcal{K}$ – множество всех правильных семейств, $\Delta(\mathcal{X}) = \Delta(\mathcal{X}, xyz, c)$ равно $(c(\mathcal{X}) - v(c))/k$ при $k = k(\mathcal{X}, xyz) > 0$ и равно $\infty$ при $k = 0$. Отсюда легко следует правильность нахождения чисел $b(c, xyz)$ в алгоритме. Далее, пусть на некотором шаге обрабатывается тройка $xyz$. Докажем, что если перед началом рассматриваемого шага для каждой ранее обработанной тройки $x'y'z'$ выполнялось $b(c, x'y'z') = 0$, то это свойство сохранится и после выполнения шага. Пусть $c_1$ и $c_2$ обозначают функцию $c$ непосредственно до и после данного шага, и пусть $x'y'z'$ некоторая ранее обработанная тройка. Мы можем считать, что $c_2(x'y'), c_2(y'z')>0$. Если $c_2(x'y')\leq c_1(x'y')$ и $c_2(y'z')\leq c_1(y'z')$, то равенство $b(c_2, x'y'z')=0$ следует из (*) (при $c=c_1$ и $c=c_2$), поскольку, очевидно, $\Delta(\mathcal{X}, x'y'z', c_2)\leq\Delta(\mathcal{X}, x'y'z', c_1)$ для всех $\mathcal{X}\in\mathfrak{X}$. Предположим теперь, что $c_2(x'y'), c_2(y'z')>0$ и $c_2(x'y')>c_1(x'y')$ (случай $c_2(y'z')>c_1(y'z')$ аналогичен). Тогда, очевидно, $b(c_1, xyz)>0$ и $x'y'=xz$, откуда следует, что $y'\neq y$, т.е. $y'$ –ранее обработанная вершина. Пусть, для определенности, $y'=z$. Поскольку тройка $yy'z'$ – ранее обработанная, то по предположению $b(c_1, yy'z')=0$. Но $c_1(yy')\geq b(c_1, xyz)>0$ и $c_1(y'z')\geq c_2(y'z')>0$, следовательно, имеется $\mathcal{X}\in\mathfrak{X}$ для которого $\Delta(\mathcal{X}, yy'z', c_1)=0$. Пусть $X_A\in\mathcal{X}$ – такое множество, что $yy', y'z'\in\partial X_A$. Из $c_1(\mathcal{X})=v(c)$ и $b(c_1, xyz)>0$ следует $k(\mathcal{X}, xyz)=0$, откуда, ввиду $yz=yy'\in\partial X_A$, имеем $xy\notin\partial X_A$ и $x'y'=xz\in\partial X_A$. Следовательно, $k(\mathcal{X}, x'y'z')>0$ и $\Delta(\mathcal{X}, x'y'z', c_2)=0$ (ввиду $c_2(\mathcal{X})\leq c_1(\mathcal{X})$ и $c_1(\mathcal{X})=v(c)$), т.е. $b(c_2, x'y'z')=0$, что и требовалось доказать. Заметим также, что $b(c_2, xyz)=0$. Таким образом, применяя индукцию, мы получаем, что для окончательной функции $\tilde{c}$ и любых $y\in V$, $x, z\in V-\{y\}$ справедливо $b(\tilde{c}, xyz)=0$. Пусть теперь $f'$ – некоторое оптимальное решение задачи $\mathcal{P}(\tilde{c})$. Если бы для некоторой цепи $L\in\mathcal{L}^+(f')$ было $|E L|\geq 2$, то в $L$ содержались бы два различных ребра $xy$ и $yz$, и мы имели бы $b(\tilde{c}, xyz)\geq f'(L)>0$. Таким образом, $|E L|=1$ для всех $L\in\mathcal{L}^+(f')$, откуда следует, что $f'$ совпадает с построенным мультипотоком $f$.

На завершающем этапе по $f$ находится оптимальное решение $f^*$ исходной задачи $\mathcal{P}(c)$. А именно, пусть $c=c^0, c^1, \ldots, c^N=\tilde{c}$ – последовательность функций на шагах основного этапа. Начиная с $f$, будем последовательно строить мультипотоки $f=f^N, f^{N-1}, \ldots, f^0=f^*$, где $f^i$ – оптимальное решение задачи $\mathcal{P}(c^i)$. Способ получения $f^i$ из $f^{i+1}$ очевиден.

Пусть $n=|V|$ и $t=|T|$. Так как $|\mathcal{V}|\leq n|\mathfrak{A}|+2$ и $|\mathfrak{A}|\leq t$, то $|\mathcal{V}|\leq tn+2$. Нетрудно убедиться, что основной этап и алгоритм в целом имеют оценку числа действий $O(n^3\sigma(tn))$, где $\sigma(n')$ – трудоемкость используемой процедуры нахождения максимального потока в сети с $n'$ вершинами (завершающий этап можно провести за $O(n^5)$ действий). Заметим, что на итерации основного этапа порядок обработки троек можно организовать таким образом, чтобы требовалось лишь $O(n)$ обращений к процедуре нахождения максимального потока в сети $(\mathcal{G}, d)$, вследствие чего можно получить общую



оценку числа действий $O(n^2\sigma(tn))$. Из-за недостатка места такую модификацию мы здесь не приводим.

Для случая внутренне четной функции $c$ алгоритм отличается от описанного только тем, что на шаге обработки каждой тройки $xyz$ полагается $c:=c-\lfloor b(c, xyz)\rfloor\theta_{xyz}$, где $\lfloor\ \rfloor$ обозначает ближайшее целое снизу. Доказательство корректности алгоритма во многом аналогично предыдущему: показывается, что в результате основного этапа для окончательной функции $\tilde{c}$ и любых $y\in V, x, z\in V-\{y\}$ будет выполняться $b(c, xyz)<1$ (доказательство проводится по индукции, аналогичной описанной выше; здесь используется (3.1) (iv) и формула (*), в которой $b(c, xyz)$ заменяется на $\lfloor b(c, xyz)\rfloor$ и $\Delta(\mathcal{X})$ на $\lfloor\Delta(\mathcal{X})\rfloor$). Отсюда получаем, что для произвольного целочисленного оптимального решения $f'$ задачи $\mathcal{P}(\tilde{c})$ справедливо $|E L|=1$ для всех $L\in\mathcal{L}^+(f')$ и, следовательно, $f'=f$.


1. Карзанов А.В. О многопродуктовых потоковых задачах с целочисленными оптимальными решениями // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 4. С.789-792.

2. Hu T.C. Multi-commodity network flows. Oper. Research, 1963, v. 11. P.344-360.

3. Купершток В.Л. Об одном обобщении теоремы Форда-Фалкерсона на многополюсные сети // Кибернетика. Киев. 1971. № 3.

4. Черкасский Б.В. Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сети // Экономика и математические методы. 1977. Т. 13. № 1. С.143-151.

5. Lovasz L. 2-matching and 2-covers of hypergraphs. Acta Math. Acad. Sci. Hangaricae, 1975, v. 26. № 3-4. P.433-444.

6. Rothschild B. and Whinston A. On two commodity network flows. Oper. Research, 1966, v. 14. P.377-387.

7. Черкасский Б.В. Многополюсные двухпродуктовые задачи // Исследования по дискретной оптимизации / Под ред. А.А.Фридмана. М.: Наука, 1976. С.261-289.

8. Карзанов А.В., Ломоносов М.В. Системы потоков в неориентированных сетях // Математическое программирование. М.: Изд-во ВНИИСИ, 1978. Вып. 1. С.59-66.

9. Карзанов А.В. Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках // Комбинаторные методы в потоковых задачах. М.: Изд-во ВНИИСИ, 1979. Вып. 3. С.6-69.