ВНИИ
СИСТЕМНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

А. В. КАРЗАНОВ

ЗАДАЧИ О МУЛЬТИРАЗРЕЗАХ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ПРЕПРИНТ

МОСКВА
1982

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 518.5

Карзанов А.В. Задачи о мультиразрезах и методы их решения. Препринт. М., Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, I982.

Работа посвящена теоретическому исследованию задач об упаковках разрезов в неориентированные сети, называемых задачами о мультиразрезах. Для основных типов таких задач получены теоремы линейной двойственности. Выделены классы задач, для которых двойственные оценки имеют специальный вид (т.н. классы ОКЦ), для задач этих классов ответ полностью обусловлен длинами кратчайших цепей, соединяющих полюса сети. Получено полное описание классов ОКЦ для задач о максимальном мультиразрезе и задач о допустимости. Предложены эффективные комбинаторные алгоритмы решения ряда задач о мультиразрезах. Исследован вопрос о дробности решения мультиразрезных задач для целочисленных сетей.

UDK 518.5

Karzanov A.V. Multicut problems and methods to solve them. Preprint. M., The Institute for Systems Studies, 1982.

The work is devoted to theoretical studies of cut packing problems on undirected networks, called multicut problems. For the considered types of such problems linear duality theorems are obtained. Classes of multicut problems are introduced being specified by a natural kind of linear duality (so-called DSC-classes); the problems of these classes are characterized by the property: their answers depend only on the lengths of shortest chains connecting pairs of network terminals. A complete description of the DSC-classes for the maximum multicut problems and the multicut feasibility problems are given. Efficient combinatorial algorithms solving a number of multicut problems are constructed. The question of solution fractionality of multicut problems on the networks with integer-valued capacities is studied.

РЕЦЕНЗЕНТ: канд. физ.-мат. наук Шоломов Л.А.

Утверждено к печати Редакционным советом Института

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена теоретическому исследованию задач об упаковках для одного класса комбинаторных объектов. В дискретной математике под задачей об упаковке принято понимать следующее. Имеется некоторое конечное множество S, элементам которого приписаны неотрицательные веса $c(e)$ (называемые также, в зависимости от интерпретации задачи, пропускными способностями, длинами, интенсивностями и т.д.). Выделено некоторое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества S, называемых объектами упаковки; эти объекты обычно имеют определенный комбинаторный смысл и задаются неявно (их число, как правило, экспоненциально велико по сравнению с числом элементов в S). Требуется найти неотрицательные веса α_F объектов $F \in \mathcal{F}$, удовлетворяющие основному условию упаковки

$$\lambda^{\alpha}(e) \overset{def}{=} \sum (\alpha_F : F \in \mathcal{F},\ e \in F) \leq c(e) \qquad \forall e \in S$$

и ряду дополнительных условий. К дополнительным условиям на α могут относиться (в разных сочетаниях) условия достижения экстремумов целевых функций, ограничения в виде неравенств или равенств, требования целочисленности или булевости и др. В теории упаковок наиболее популярны следующие три типа задач: I) задача о максимальной упаковке, состоящая в отыскании функции α с максимальной величиной $\|\alpha\| = \sum(\alpha_F : F \in \mathcal{F})$, 2) задача о допустимости (или о существовании), в которой семейство $\mathcal{F}$ разбито на подсемейства $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$, и нужно удовлетворить требованиям $\sum(\alpha_F : F \in \mathcal{F}_i) \geq d_i,\ i=1,\ldots,m$, для заданных величин d_i, 3) стоимостная задача, состоящая в максимизации целевой функции $\sum(a(e)\lambda^{\alpha}(e) : e \in S)$ или в минимизации этой функции при условии максимальности $\|\alpha\|$ (где $a(e)$ - "удельная стоимость" элемента e). К задаче каждого из этих типов часто добавляют требование целочисленности решения.

Задачи об упаковках комбинаторных объектов имеют широкую сферу приложений. Например, известная в теории передачи информации задача о широковещании интерпретируется как задача об упаковке, в которой пакуемыми объектами являются реберные множества деревьев графа, содержащих данное подмножество узлов. Двойственная задача к задаче о максимальной упаковке ориентированных циклов графа - это, в других терминах, задача об оп-

тимальном устранении контуров в ориентированных сетях. Если в качестве объектов упаковки рассматривать реберные множества цепей, соединяющих определенные пары узлов сети, мы получаем широкий класс многопродуктовых потоковых и транспортных задач.

В настоящей работе исследуются задачи, в которых объектами упаковки служат разрезы неориентированных графов. Задачи такого рода известны как задачи о многопродуктовых разрезах (мы применяем в работе более краткое название - задачи о мультиразрезах). Первоначальное изучение многопродуктовых разрезов проводилось в рамках теории блокирующих многогранников Фалкерсона. Из установленного в этой теории нового типа двойственности задач комбинаторной оптимизации следовала теорема о линейном минимаксе специального вида для задач о максимальной упаковке двухпродуктовых разрезов. Впоследствии для этого класса задач были найдены эффективные алгоритмы решения и была доказана теорема о существовании полуцелочисленного оптимального решения для целочисленных сетей. Были изучены и некоторые другие классы задач. Однако эти исследования были весьма разрозненными, а разработанный в них комбинаторный аппарат был недостаточен для решения более сложных задач об упаковках разрезов.

В работе предпринята попытка построения комбинаторной теории мультиразрезов, исходя из достаточно хорошо развитой к настоящему времени параллельной теории многопродуктовых потоков в неориентированных сетях. Основываясь на принятой классификации задач о многопродуктовых потоках, мы выделяем основные типы задач о мультиразрезах: общую задачу, задачу о максимальном мультиразрезе, задачу о существовании, задачу о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости, а также вспомогательную задачу о запирающем мультиразрезе (раздел 2). Дальнейшая классификация проводится по виду определяющего структурного семейства - так называемой разрезной схемы. В разделе 3 устанавливаются теоремы линейной двойственности для задач каждого типа и вводятся в рассмотрение подклассы задач, для которых двойственные оценки имеют специальный вид. Эти подклассы названы "классами ОКЦ", они характеризуются тем свойством, что ответ каждой из составляющих их задач полностью обусловлен длинами кратчайших цепей, соединяющих пары полюсов сети. Отмечается, что к этим классам принадлежат все изученные ранее задачи о мультиразрезах. Раздел 4 посвящен собственному исследованию "препятствий" (двойственных функций) в задачах о мультиразрезах. Эти препятствия интерпретируются как функции ширины ребер и являются двойственными аналогами метрик - препятствий в задачах о многопродуктовых потоках. В этом разделе устанавливаются достаточные условия простоты (неразложимости) таких функций и выделяются некоторые классы комбинаторных препятствий. В разделе 5 рассматривается вспомогательная задача о запирающем мультиразрезе и приводится теорема, описывающая все ситуации (в "массовых" терминах), когда эта задача имеет решение. Здесь же демонстрируются некоторые приложения такой задачи, в частности, показывается, как с ее помощью получать разложения метрик в неотрицательные линейные комбинации метрик-разрезов. Раздел 6 посвящен изложению комбинаторного алгоритма, строящего полуцелочисленные запирающие мультиразрезы в целочисленных сетях. Этот раздел стоит несколько в стороне от основной линии работы, и его чтение может быть опущено без ущерба для понимания последующего. Основные результаты работы представлены в разделах 7 и 8. Здесь формируются теоремы, дающие полное описание класса ОКЦ для задач о существовании и задач о максимальном мультиразрезе, а также теорема об одной серии задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости этого класса. Здесь также рассматриваются вопросы о дробности решений мультиразрезных задач на целочисленных сетях и приводятся эффективные комбинаторные алгоритмы решения ряда задач. Кроме того, здесь исследуется одна смежная задача, называемая задачей об оптимальном устранении отрицательных циклов в неориентированных сетях. Основные теоремы этих разделов приведены без доказательств либо с частичными доказательствами ввиду ограниченного размера работы.

Следует отметить, что в этой работе мы не преследуем цель осветить прикладные аспекты теории мультиразрезов. Предлагаемое исследование имеет теоретический характер и рассчитано на специалистов в области дискретной математики и математического программирования, интересующихся проблемами теории упаковок и покрытий комбинаторных объектов и смежными вопросами.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

I.I. Пусть $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z}$ - множества действительных, целых и четных чисел, соответственно, а $\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+$ и $2\mathbb{Z}_+$ - подмножества

неотрицательных чисел в этих множествах. Для конечного множества S и числового множества $\mathbb{N}$ будем обозначать через $\mathbb{N}^S$ совокупность всех функций на S со значениями в $\mathbb{N}$.

Неупорядоченная пара различных элементов $x, y \in S$ будет называться ребром (на S) и обозначаться в виде $[xy]$ или $[yx]$; символом $[S]$ будем обозначать совокупность всех ребер на S (таким образом, $(S, [S])$ - это полный неориентированный граф с множеством вершин S). Упорядоченная пара различных элементов $x, y \in S$ называется дугой (на S) и обозначается (xy).

Для пары непустых подмножеств $X, Y \subset S$ таких, что $X \cap Y = \emptyset$, определим множество $[X, Y]$, состоящее из всех ребер в $[S]$ с одним концом в X и другим - в Y. Если $Y = S \setminus X$, то множество $[X, Y]$ называется (неориентированным) разрезом на S. Если из контекста следует, что множество X рассматривается в качестве подмножества множества S, то для $S \setminus X$ может применяться обозначение $\bar{X}$. Поэтому разрез $[X, Y]$ может быть обозначен $[X, \bar{X}]$ или $[Y, \bar{Y}]$. Для заданных функции на ребрах $f \in \mathbb{R}^{[S]}$ и разреза $[X, \bar{X}]$ величина $\sum(f(e) : e \in [X, \bar{X}])$ будет обозначаться в виде $f[X, \bar{X}]$.

Подмножество X в S называют собственным, если $X \neq \emptyset$ и $X \neq S$, совокупность всех собственных подмножеств в S обозначим $]S[$.

Непустая последовательность L различных элементов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ в S, рассматриваемая с точностью до обращения порядка, называется цепью на S и обозначается в виде $[x_0 x_1 \ldots x_k]$ или $[x_k x_{k-1} \ldots x_0]$. Для цепи $L = [x_0 x_1 \ldots x_k]$ определим множество ребер $E_L = \{[x_i x_{i+1}] : i \in \overline{0, k-1}\}$ и ребер из концевых элементов $u_L = [x_0 x_k]$. Пусть $\mathcal{L}^S$ обозначает множество всех цепей на S. Для фиксированного подмножества вершин $T \subseteq S$ (подмножества ребер $U \subseteq [S]$) определим множество цепей $\mathcal{L}^{S,T}$ в $\mathcal{L}^S$ с обоими концами в T (соответственно, множество цепей $\mathcal{L}^{S,U} = \{L \in \mathcal{L}^S : u_L \in U\}$). Цепь $L \in \mathcal{L}^{S,T}$ назовем правильной, если множеству T принадлежат только концевые элементы в L; множество всех правильных цепей для S и T обозначим $\tilde{\mathcal{L}}^{S,T}$.

Аналогичная последовательность C элементов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ при $k \geqslant 3$ и $x_k = x_0$ называется (неориентированным) циклом на S. Для цикла C подобным образом вводится множество ребер E_C .

Пусть $\theta^S_{S'}$ обозначает характеристическую функцию подмножества $S' \subseteq S$, т.е. $\theta^S_{S'}(s)$ равно 1 для $s \in S'$ и равно 0 для $s \in S \setminus S'$. Для характеристических функций следующих типов подмножеств будут применяться специальные обозначения: (а) для $X \in \,]S[$ характеристическая функция $\theta^{[S]}_{[X,\bar{X}]}$ разреза $[X,\bar{X}]$ будет обозначаться в виде ρ^S_X , (б) для цепи (цикла) L функция $\theta^{[S]}_{E_L}$ обозначается θ_L .

Носитель $\{s \in S : f(s) \neq 0\}$ функции f на S обозначается $supp\,(f)$.

1.2. В дальнейшем мы будем фиксировать некоторое основное множество V , его подмножество T, $|T| \geq 2$, и совокупность собственных подмножеств $CS \subseteq \,]T[$. Объект $N = (V,T,\ell)$, где $\ell \in R^{[V]}_+$, назовем <u>разрезной сетью</u>, или просто <u>сетью</u>. Множества V и T считаются, соответственно, множествами <u>вершин</u> и <u>терминалов</u> (или <u>полюсов</u>), а функция ℓ - функцией <u>длин</u> ребер сети N .

Обозначим через $]V,CS[$ множество $\{X \subset V : X \cap T \in CS\}$. Всякая функция $\alpha : \,]V,CS[\, \to R_+$ называется <u>мультиразрезом</u> на V с <u>разрезной схемой</u> (или просто <u>схемой</u>) CS . Для мультиразреза α вводятся следующие основные характеристики:

а) <u>Функция нагрузки</u> (на ребра) $\lambda^\alpha \in R^{[V]}_+$, определяемая как

$$\lambda^\alpha = \sum(\alpha_X \rho^V_X : X \in \,]V,CS[\,) \qquad (\text{т.е. } \lambda^\alpha(e) = \sum(\alpha_X : X \in \,]V,CS[,\ e \in [X,\bar{X}]),\ e \in [V]) ;$$

б) <u>Функция мощности</u> $\delta^\alpha \in R^{CS}_+$, определяемая как

$$\delta^\alpha_A = \sum(\alpha_X : X \subset V,\ X \cap T = A) \qquad \text{для } A \in CS \ ;$$

в) <u>Общая мощность</u> $\|\alpha\| \overset{def}{=} \sum(\delta^\alpha_A : A \in CS) = \sum(\alpha_X : X \in \,]V,CS[\,)$.

Мультиразрез α называется <u>допустимым</u> в сети $N = (V,T,\ell)$, если выполняется условие упаковки

$$\lambda^\alpha \leq \ell \quad (\text{т.е. } \lambda^\alpha(e) \leq \ell(e) \text{ для всех } e \in [V]). \qquad (1.1)$$

Как правило, мы будем иметь дело с допустимыми мультиразрезами, и эпитет "допустимый" будет опускаться.

Разрезная схема CS (а также мультиразрез $\alpha : \,]V,CS[\, \to R_+$) называются <u>полными</u>, если $CS = \,]T[$. В этом случае

для множества $]V,CS[$ применяется обозначение $]V,T[$.

Сеть (V,T,ℓ) называется <u>целочисленной</u>, если $\ell \in Z^{[V]}_+$.

1.3. В предыдущем разделе мы дали определение мультиразреза в <u>функциональной</u> форме. Эта форма является наиболее подходящей для тех исследований, которые проводятся в данной работе. Однако в ряде случаев бывает полезно использовать другие формы задания мультиразреза.

Под мультиразрезом на V с разрезной схемой $CS \subseteq \,]T[$, заданным в <u>комбинаторной</u> форме, понимается семейство Q подмножеств множества V (с возможными повторениями), в котором для каждого подмножества $X \in Q$ справедливо $X \cap T \in CS$. Функция нагрузки λ^Q определяется как

$$\lambda^Q(e) = |\{X \in Q : e \in [X,\bar{X}]\}|, \quad e \in [V],$$

а функция мощности δ^Q - как

$$\delta^Q_A = |\{X \in Q : X \cap T = A\}|, \quad A \in CS .$$

Эта форма используется для целочисленных мультиразрезов. Очевидно, Q эквивалентно целочисленному функциональному мультиразрезу $\alpha : \,]V,CS[\, \to Z_+$, для которого $\alpha_X = |\{X' \in Q : X' = X\}|$ для каждого $X \in \,]V,CS[$. Комбинаторная форма задания мультиразреза будет использоваться в разделе 6.

Под мультиразрезом на V с разрезной схемой $CS \subseteq \,]T[$, заданным в форме <u>потенциалов</u>, понимается набор чисел $\{\pi_A(x) \in R : A \in CS,\ x \in V\}$ (потенциалов вершин), таких, что для каждого $A \in CS$ справедливо $\pi_A(s) = \Pi^1_A\ (s \in A)$, $\pi_A(t) = \Pi^2_A\ (t \in T \setminus A)$, $\Pi^1_A \leq \Pi^2_A$ и $\Pi^1_A \leq \pi_A(z) \leq \Pi^2_A\ (z \in V \setminus T)$. Для такого мультиразреза π функция нагрузки λ^π определяется как

$$\lambda^\pi(xy) = \sum(|\pi_A(x) - \pi_A(y)| : A \in CS), \quad (xy) \in [V],$$

а функция мощности δ^π - как $\delta^\pi_A = \Pi^2_A - \Pi^1_A$, $A \in CS$.

Мультиразрез π может быть преобразован в эквивалентный функциональный мультиразрез α следующим образом. Пусть $\Pi^1_A = \tau^1_A < \tau^2_A < \ldots < \tau^{m(A)}_A = \Pi^2_A$ - последовательность различных потенциалов (для каждого $A \in CS$). Положим $X(A,i) = \{x \in V : \pi_A(x) \leq \tau^i_A\}$, $i = 1,\ldots,m(A)-1$. Тогда α определяется как $\alpha_{X(A,i)} = \tau^{i+1}_A - \tau^i_A$, $A \in CS$, $i = 1,\ldots,m(A)-1$, и $\alpha_X = 0$ - для остальных X в $]V,CS[$. Легко видеть, что $\lambda^\alpha = \lambda^\pi$ и $\delta^\alpha = \delta^\pi$

Очевидно, мультиразрез α, определенный таким образом, является, вообще говоря, не единственным функциональным мультиразрезом, эквивалентным π. Обратно, для произвольного функционального мультиразреза α эквивалентный мультиразрез π может быть определен как $\pi_A(s)=0\ (s\in A)$ и $\pi_A(x)=$ $=\Sigma(\alpha_X : X\subset V,\ X\cap T=A,\ x\in V\setminus X)\quad (x\in V\setminus A)$ для каждого $A\in CS$. Можно убедиться, что указанный способ определяет единственный (с точностью до константы) мультиразрез π, эквивалентный α.

Мультиразрезы в форме потенциалов в данной работе встречаются только в разделах 2.2 и 3.4.

2. ЗАДАЧИ О МУЛЬТИРАЗРЕЗАХ

2.1. В этом разделе мы выделяем основные типы задач о мультиразрезах. Задачи этих типов характеризуются тем общим обстоятельством, что в них накладываются условия только на функцию нагрузки λ^{α} и функцию мощности δ^{α}, причем эти условия – линейные. Проводя классификацию задач о мультиразрезах, мы исходим из аналогичной классификации для задач о многопродуктовых потоках в неориентированных сетях, которая введена в работах [3,5,8].

А. Задача о существовании $EX(V,CS,\ell,d)$ – для заданных сети $N=(V,T,\ell)$, схемы $CS\subseteq\,]T[$ и функции "требований на мощности" $d\in\mathbb{R}_+^{CS}$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$ (т.е. удовлетворяющий условию (1.1)), для которого

$$\delta^{\alpha}\geq d \tag{2.1}$$

или установить отсутствие такого мультиразреза.

Б. Задача о максимальном мультиразрезе (сокращенно, задача на max-Σ) $\Sigma(V,CS,\ell)$ – для заданной сети $N=(V,CS,\ell)$ и схемы $CS\subseteq\,]T[$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, общая мощность которого $\|\alpha\|$ – максимальная.

Для сети $N=(V,T,\ell)$ и схемы CS максимальную возможную величину $\|\alpha\|$ будем обозначать $\Sigma^{N,CS}$.

В. Задача о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости $COST(V,CS,\ell,a)$ – для сети $N=(V,T,\ell)$, схемы $CS\subseteq\,]T[$ и функции "стоимости ребер" $a\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, для которого $\|\alpha\|=\Sigma^{N,CS}$ и при этом величина $a\cdot\lambda^{\alpha}$ – минимальная.

(Для произвольных $f,g\in\mathbb{R}^S$ $f\cdot g$ обозначает величину $\Sigma(f(s)g(s): s\in S)$.)

Г. Общая задача $GEN(V,CS,\ell,d,b,a)$ – для заданной сети (V,T,ℓ) и функций $d,b\in\mathbb{R}_+^{CS}$, $a\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющий (2.1) и максимизирующий величину $b\cdot\delta^{\alpha}-a\cdot\lambda^{\alpha}$ (здесь величина $a(e)$ интерпретируется как "стоимость" использования единицы длины ребра e; b_A – как "премия" за упаковку разреза $[X,\bar{X}]$ единичного веса такого, что $X\cap T=A\ (A\in CS)$; d – функция требований на мощности; величина $b\cdot\delta^{\alpha}-a\cdot\lambda^{\alpha}$ – это "доход" от мультиразреза α).

2.2. Обычно задачи об упаковках разрезов формулируются на графах: для данного неориентированного графа $G=(V,E)$ (с множеством вершин V и множеством ребер E), некоторого множества его разрезов $\mathcal{C}$ и функции ℓ на множестве ребер E требуется найти функцию α на $\mathcal{C}$, удовлетворяющую условию упаковки и обладающую определенными дополнительными свойствами. Любую такую задачу можно переформулировать в виде задачи об упаковке разрезов на сети $(V,T,\bar{\ell})$, доопределив функцию $\bar{\ell}$ на множестве ребер $[V]\setminus E$ достаточно большими числами и подобрав некоторое множество полюсов T. Выбор сетей (V,T,ℓ) в качестве основного объекта для изучения задач об упаковках разрезов оказывается наиболее удобным для формулировок и доказательств теорем двойственности, о которых пойдет речь в разделе 3.

Рассмотрим два примера задач о мультиразрезах.

Пример I. Наиболее простым примером задачи о мультиразрезах является задача о максимальной упаковке "однопродуктовых" разрезов. Эта задача была поставлена и решена в [20]. В наших терминах – это задача на max-Σ $\Sigma(V,CS_1,\ell)$ в сети $N=$ $=(V,T,\ell)$ с множеством полюсов $T=\{s,t\}$ и разрезной схемой $CS_1=\{\{s\}\}$. Как показано в [20], Σ^{N,CS_1} равно длине кратчайшей цепи, соединяющей s и t. Действительно, определим расстояние $\rho_\ell(s,x)$ от s до произвольной вершины x как минимум из длин всевозможных цепей, соединяющих s и x. Тогда для мультиразреза π (в форме потенциалов), определенного как $\pi(s)=0$, $\pi(x)=\mu_\ell[sx]$ $(x\in V\setminus\{s\})$ справедливо $\lambda^\pi\leq\ell$ и $\|\pi\|=\delta^\pi_{\{s\}}=\mu_\ell[st]$; таким образом, $\Sigma^{N,CS_1}=$ $=\mu_\ell[st]$ (в силу очевидного $\Sigma^{N,CS_1}\leq\mu_\ell[st]$). Для целочисленной сети указанный мультиразрез – также целочисленный.

Пример 2. Другим изученным примером является задача о максимальной упаковке "двухпродуктовых" разрезов. В наших терминах – это задача $\Sigma(V,CS_2,\ell)$, где $T=\{s,t,p,q\}$, $CS_2=\{\{s,p\},\{s,q\}\}$ (т.е. требуется найти максимальную упаковку разрезов, которым принадлежат оба ребра $[st]$ и $[pq]$, см. рис. 2.I). Известно, что для рассматриваемой задачи справедливо $\Sigma^{N,CS_2}=\min\{\mu_\ell[st],\mu_\ell[pq]\}$ (это следует из неравенства длины-ширины Лемана [I6] (или из теоремы Фалкерсона о блокирующих многогранниках [I2]) и теоремы Ху о двухпродуктовых потоках [I3]) . Сеймур [2I] конструктивно доказал более сильную теорему: если сеть N – целочисленная и величина $\ell_C\overset{def}{=}\Sigma(\ell(e):e\in E_C)$ – четна для любого цикла C на V , то равенство $\|\alpha\|=\min\{\mu_\ell[st],\mu_\ell[pq]\}$ достигается для целочисленного мультиразреза α . Наконец, Певзнер [I0] предложил полиномиальный алгоритм решения данной задачи при произвольных длинах ребер, гарантирующий полуцелочисленность решения для целочисленных сетей.

2.3. Классы задач с фиксированной разрезной схемой. Множества задач каждого из типов A, $Б$ и $В$, введенных в 2.2, естественно классифицируются по виду разрезной схемы.

Пусть $EX(CS),\Sigma(CS),COST(CS)$ обозначают, соответственно, совокупности всех задач $EX(V,CS,\ell,d)$, $\Sigma(V,CS,\ell)$, $COST(V,CS,\ell,a)$ с фиксированными T и $CS\subseteq]T[$ и всевозможными $V\supseteq T$, $\ell\in R_+^{[V]}$, $d\in R_+^{CS}$, $a\in R_+^{[V]}$.

Например, рассмотренные в примере I задачи о максимальной упаковке однопродуктовых разрезов образуют класс $\Sigma(CS_1)$ с $T=\{s,t\}$ и $CS_1=\{\{s\}\}$, а задачи из примера 2 – класс $\Sigma(CS_2)$ с $T=\{s,t,p,q\}$, $CS_2=\{\{s,p\},\{s,q\}\}$.

Схемы $CS,CS'\subseteq]T[$ назовем эквивалентными, если для каждого $A\in CS$ справедливо $A\in CS'$ или $T\setminus A\in CS'$, и наоборот. Схема CS считается неизбыточной, если из $A\in CS$ следует $T\setminus A\notin CS$. Легко видеть, что задача каждого из типов A $Б$ и $В$, определенных в 2,2 , равносильна задаче с неизбыточной эквивалентной схемой (например, вместо задачи $EX(V,CS,\ell,d)$

можно рассматривать задачу $EX(V,CS',\ell,d')$, где CS' – произвольная неизбыточная схема, эквивалентная CS, и d'_A $(A\in CS')$ определяется как $d'_A=d_A$, если $A\in CS$ и $T\setminus A\notin CS$, $d'_A=d_{T\setminus A}$, если $T\setminus A\in CS$ и $A\notin CS$, и $d'_A=d_A+d_{T\setminus A}$, если $A,T\setminus A\in CS$). В дальнейшем, рассматривая класс задач с фиксированной разрезной схемой CS , мы, если надо, будем изменять эту схему, оставляя ее эквивалентной.

2.4. Задача о запирающем мультиразрезе. Эта задача, не укладывающаяся в классификацию, данную в 2.2 , оказывается полезной при решении ряда задач о мультиразрезах основных типов. Пусть $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$ – допустимый мультиразрез в сети (V,T,ℓ). Положим

$$\varkappa^\alpha=\lambda^\alpha|_{[T]}\,. \tag{2.2}$$

Для произвольной цепи $L\in\mathcal{L}^{V,T}$, $u_L=[st]$, ввиду допустимости α имеем

$$\left.\begin{array}{l}\ell_L\ (\overset{def}{=}\Sigma(\ell(e):e\in E_L)\geq\Sigma(\lambda^\alpha(e):e\in E_L)=\Sigma(\alpha_X|[X,\bar X]\cap E_L|:\\ X\in]V,CS[)\geq\Sigma(\alpha_X:X\in]V,CS[,[st]\in[X,\bar X])=\lambda^\alpha[st]=\varkappa^\alpha[st].\end{array}\right\}\tag{2.3}$$

Следовательно, $\varkappa^\alpha[st]\leq\mu_\ell[st]$, где $\mu_\ell[st]=\min\{\ell_L:L\in\mathcal{L}^V,u_L=[st]\}$. Функцию $\varkappa^\alpha$ назовем функцией запирания для α . Пусть теперь задано некоторое подмножество ребер $U\subseteq[T]$. Скажем, что α запирает ребро $[st]\in U$, если

$$\varkappa^\alpha[st]=\mu_\ell[st], \tag{2.4}$$

и запирает множество U , если равенство (2.4) выполняется для любого $[st]\in U$.

Задача о запирающем мультиразрезе $LOCK(V,U,\ell)$ состоит в построении в сети (V,T,ℓ) допустимого полного мультиразреза $\alpha:]V,T[\to R_+$, запирающего заданное множество U , или в доказательстве, что такого мультиразреза не существует.

Определение. Граф $H=(T,U)$ называется запираемым, если задача $LOCK(V,U,\ell)$ имеет решение при любых $V\supseteq T$ и $\ell\in R_+^{[V]}$.

Для фиксированного $H=(T,U)$ совокупность задач $LOCK(V,U,\ell)$ при всевозможных $V\supseteq T$ и $\ell\in R_+^{[V]}$ обозначим $LOCK(H)$.

В разделе 5 мы докажем теорему, дающую полное описание запираемых графов (теорема 5.I), а в разделе 6 опишем алгоритм нахождения полуцелочисленного решения задачи $LOCK(V,U,\ell)$ для произвольной целочисленной функции ℓ и запираемого графа $H=(T,U)$. Некоторые следствия теоремы 5.I и этого алгоритма будут продемонстрированы в разделе 5.1: будут получены алгоритмы решения задач о двухпродуктовых мультиразрезах (на max-Σ и о существовании) для целочисленных сетей, будут найдены достаточные условия разложимости метрики в неотрицательную линейную комбинацию метрик-разрезов.

Для индивидуальных задач $LOCK(V,U,\ell)$ (быть может, с незапираемым графом $H=(T,U)$ мы в состоянии указать лишь общие условия разрешимости, следующие из леммы Фаркаша; эти условия демонстрируют двойственную связь задачи о запирающем мультиразрезе с некоторым классом задач о многопродуктовых потоках в неориентированных сетях (замечание 5.1 в разделе 5.4).

2.5. Сеймур [22] рассмотрел одну задачу об упаковках разрезов, которая по виду очень похожа на задачу о запирающем мультиразрезе. Приведем несколько иную, но эквивалентную, постановку этой задачи (это относится и к теореме 2.1).

<u>Задача S.</u> Пусть для полного графа $(V,[V])$ заданы функция длины ребер $\ell\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ и подмножество ребер $U\subseteq[V]$; требуется найти такую функцию $\alpha\in\mathbb{R}_+^{2^V}$, что

$$\text{из } \alpha_X>0 \quad \text{следует} \quad |[X,\bar X]\cap U|=1, \tag{2.5}$$

$$\Sigma(\alpha_X : X\subset V,\ e\in[X,\bar X]) \begin{cases} \le \ell(e), & e\in[V]\setminus U,\\ =\ell(e), & e\in U. \end{cases} \tag{2.6}$$

<u>Теорема 2.1 [22]</u>. Следующие утверждения эквивалентны:
(i) задача S имеет решение;
(ii) для любого простого цикла C на V справедливо

$$\Sigma(\ell(e): e\in E_C\cap U)\le\Sigma(\ell(e): e\in E_C\setminus U). \tag{2.7}$$

Из неравенств (2.7) легко следует $\mu_\ell(e)=\ell(e)$ для любого $e\in U$. Поэтому фактически задача S отличается от задачи $LOCK(V,U,\ell)$ только наложением дополнительного условия (2.5). Однако, несмотря на близость постановок, эти задачи оказываются весьма различными. Расширенный вариант задачи S будет рассмотрен в разделе 8 в общем контексте задач на max-Σ, там же будет показано, что к этому варианту сводится задача об оптимальном устранении отрицательных циклов в неориентированных взвешенных графах.

В примечании к работе [22] указывается, что теорема 2.1 имеет более сильную, полуцелочисленную, форму. В разделе 8.3

мы покажем, что при помощи теоремы 2.1 можно доказать следующую теорему: если ℓ - целочисленная функция, и для любого простого цикла C величина $\Sigma(\ell(e): e\in E_C\setminus U)-\Sigma(\ell(e): e\in E_C\cap U)$ - неотрицательная и четная, то задача S имеет целочисленное решение (теорема 8.2).

2.6. В этом разделе мы приведем некоторые сведения о многопродуктовых потоках в неориентированных сетях, которые будут полезны для дальнейшего. Мы будем в основном придерживаться терминологии работ [3,5,8].

Под неориентированной <u>потоковой сетью</u> (или просто сетью) понимается объект $N=(V,T,w)$, где V - множество вершин, $T\subseteq V$ - множество полюсов и $w\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ - функция пропускной способности ребер, а под <u>потоковой схемой</u> - некоторый неориентированный граф $FS=(T,U)$. Допустимым мультипотоком для N и FS называется функция $\varphi:\mathcal{L}^{V,U}\to\mathbb{R}_+$, для которой выполняются ограничения по пропускным способностям

$$\Sigma(\varphi_L : L\in\mathcal{L}^{V,U},\ e\in E_L)\le w(e),\quad e\in[V], \tag{2.8}$$

(следуя [5,8], мы применяем сокращенный термин "мультипоток" вместо "многопродуктовый поток").

Следующие две задачи хорошо известны (мы приводим их в эквивалентных формулировках).

<u>Мультипотоковая задача о существовании</u> $EX^f(V,U,w,d)$ состоит в построении для данных (V,T,w), $FS=(T,U)$, $d\in\mathbb{R}_+^U$ допустимого мультипотока $\varphi:\mathcal{L}^{V,U}\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющего требованиям

$$\Sigma(\varphi_L : L\in\mathcal{L}^{V,U},\ u_L=u)\ge d(u),\quad u\in U. \tag{2.9}$$

<u>Мультипотоковая задача на</u> max-Σ $\Sigma^f(V,U,w)$ состоит в построении для данных (V,T,w) и $FS=(T,U)$ допустимого мультипотока $\varphi:\mathcal{L}^{V,U}\to\mathbb{R}_+$, максимизирующего величину $\|\varphi\|=\Sigma(\varphi_L: L\in\mathcal{L}^{V,U})$.

<u>Теорема 2.2.</u> Задача о существовании $EX^f(V,U,w,d)$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой метрики μ на V справедливо

$$\Sigma(\mu(u)d(u): u\in U)\le\mu\cdot w \tag{2.10}$$

(метрика μ на V - это функция на множестве ребер $[V]$, удовлетворяющая неравенству треугольника $\mu(xy)+\mu(yz)\ge\mu(xz)$,

67I6

для любых различных $x,y,z\in V$).

Эта теорема была впервые сформулирована в [9] и получила комбинаторное доказательство в [8]. Первоначальный критерий разрешимости данной задачи (справедливый и для ориентированных сетей) имел несколько иной, но близкий, вид; он был сформулирован в [I9] и строго доказан в [I5].

Теорема 2.3 [8]. Для сети $N=(V,T,w)$ и потоковой схемы $FS=(T,U)$ справедливо

$$\max\{\|\varphi\|\}\ (\overset{def}{=}\Sigma^{N,FS}) = \min\{\mu\cdot w\},$$

где максимум берется по всем допустимым мультипотокам $\varphi:\Sigma^{V,U}\to R_+$, а минимум – по всем метрикам μ на V, таким, что $\mu(u)=1$ для любого $u\in U$.

Из классической теоремы Форда-Фалкерсона [10] следует, что для разрешимости задачи $EX^f(V,U,w,d)$ необходимо, чтобы для любого разреза $[X,\bar X]$ на V выполнялось

$$\Sigma\,(d(u):\ u\in U\cap[X,\bar X]) \le w[X,\bar X]. \qquad (2.II)$$

Неравенство (2.II) является частным случаем неравенства (2.10) при $\mu=\rho^V_X$ (ρ^V_X является метрикой и называется метрикой-разрезом). Выполнение неравенства (2.II) для всех разрезов $[X,\bar X]$ является необходимым (но, вообще говоря, не достаточным) условием разрешимости задачи. Полное описание (в "хороших" комбинаторных терминах) класса задач $EX^f(V,U,w,d)$, разрешимых при выполнении неравенств (2.II), - неизвестно (и, по-видимому, вряд ли может быть получено). Однако в терминах потоковых схем ответ дает следующая теорема Папернова.

Теорема 2.4 [9]. Пусть $FS=(T,U)$ - граф, не содержащий изолированных вершин. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) для любых $V\supseteq T$, $w\in R_+^{[V]}$ и $d\in R_+^{U}$ задача $EX^f(V,U,w,d)$ - разрешима, если неравенства (2.II) справедливы для любого разреза $[X,\bar X]$ на V;

(ii) $FS\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, - где K_4 - полный граф на четырех вершинах, C_5 - цикл на пяти вершинах, $\mathfrak{X}^2$ - множество всех графов, представимых в виде объединения двух звезд (рис. 2.2).

(В [I7] приведено усиление утверждения (i) этой теоремы, являющееся следствием алгоритма трудоемкости

$O(P(|V|)\,w[V])$ (где $P(n)$ - некоторый полином и $w[V]=\Sigma(w(e): e\in[V])$) : пусть $FS\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, функции w и d - целочисленные, и пусть величина $w[X,\bar X]-\Sigma(d(u): u\in U\cap[X,\bar X])$ - неотрицательная и четная для любого $X\subset]V[$, тогда задача $EX^f(V,U,w,d)$ имеет целочисленное решение. В [3] приводится алгоритм решения произвольной задачи для $FS\in\{K_4\}\cup\{C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, имеющий трудоемкость $O(|V|^5)$ (при целочисленных w и d он находит полуцелочисленное решение). Частным случаем теоремы 2.4 является хорошо известная теорема Ху [I4] о существовании двухпродуктового потока с заданными мощностями (в этом случае FS - паросочетание из двух ребер, принадлежащее множеству $\mathfrak{X}^2$). Диниц обобщил теорему Ху на произвольные $FS\in\mathfrak{X}^2$ (см. [I]). Независимое доказательство для $FS=K_4$ дано в [23].

Аналогичный вопрос был поставлен для задач на $\max$-Σ: при каких $N=(V,T,w)$ и $FS=(T,U)$ величина $\Sigma^{N,FS}$ зависит только от пропускных способностей минимальных разрезов сети, т.е. справедливо

$$\Sigma^{N,FS}=\min\{\Sigma(\beta_A\nu^w_A:\ A\in]T[)\} \qquad (2.I2)$$

где минимум берется по всем $\beta\in R_+^{]T[}$ таким, что $\Sigma(\beta_A:\ u\in[A,T\setminus A])=1$ для каждого $u\in U$, а ν^w_A обозначает величину $\min\{w[X,\bar X]:\ X\subset V,\ X\cap T=A\}$. Как и для предыдущей задачи, ответ найден только в терминах потоковых схем. Перед тем, как сформулировать этот результат, введем некоторые определения, которые понадобятся и в дальнейшем.

Два подмножества X,Y множества S называются трансверсальными, если непусто каждое из четырех множеств $X\cap Y$, $X\setminus Y$, $Y\setminus X$ и $S\setminus(X\cup Y)$, и называются параллельными - в противном случае (эти термины были введены в [2]). Совокупность $\mathcal{D}$ собственных подмножеств в S называется i-зацепленной (для $i\ge 2$), если в $\mathcal{D}$ имеется подсемейство $\mathcal{D}'$, состоящее из i попарно трансверсальных множеств. 2-незацепленная совокупность называется параллельной.

Пусть $\mathcal{A}(FS)$ обозначает совокупность всех максимальных по включению независимых подмножеств вершин в $FS=(T,U)$ (подмножество вершин называется независимым, если никакие две его вершины - не смежны). Скажем, что граф FS - четен (относительно независимых множеств), если все циклы гиперграфа $\mathcal{A}(FS)$ - четные.

Теорема 2.5 [5,6]. Пусть $FS=(T,U)$ – граф без изолированных вершин.

а) Если множество $\mathcal{A}(FS)$ – 3-незацепленное, то для любых $V\supseteq T$ и $w\in R_+^{[V]}$ справедливо минимаксное равенство (2.12). Если при этом $w\in \mathbb{Z}_+^{[V]}$, то задача $\Sigma^f(V,U,w)$ имеет четвертьцелочисленное решение, и имеет полуцелочисленное решение, когда граф FS – четен.

б) Если множество $\mathcal{A}(FS)$ – 3-зацепленное, $V\supset T$ и $|V|\geq|T|+4$, то существует функция $w\in R_+^{[V]}$, для которой (2.12) – не верно.

Доказательство утверждения (а) этой теоремы следует из алгоритма, изложенного в [5] (подробное описание приводится в [3]), а доказательство утверждения (б) дается в [6]. Заметим, что найденные доказательства как для (а), так и для (б) – весьма сложные.

Задачи $EX^f(FS)$ и $\Sigma^f(FS)$ со схемами FS, указанными в теоремах 2.4 и 2.5, соответственно, называются принадлежащими классу ОМР (задачи, определяемые минимальными разрезами сети).

2.7. В разделе 3 будет доказана теорема двойственности для общей мультиразрезной задачи $GEN(V,CS,\ell,d,b,a)$, исходя из которой будут получены теоремы двойственности для задач на max-Σ и задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости, а также теорема о разрешимости для задач о существовании. Для этих задач "препятствия" (т.е. функции, дающие точную оценку оптимума или необходимые и достаточные условия разрешимости) названы функциями ширины (по аналогии с метриками или функциями расстояний, являющимися "препятствиями" в задачах о мультипотоках). Собственному исследованию функций ширины (описанию достаточных условий их неразложимости) посвящен раздел 4. В разделе 3 для рассматриваемых типов задач о мультиразрезах определяются классы ОКЦ (классы задач, решение которых зависит только от длин кратчайших цепей, соединяющих полюса сети). Двойственными препятствиями для задач этих классов являются функции ширины специального вида, а именно, характеристические функции ребер правильных цепей. В разделе 7 мы дадим полное описание (в терминах разрезных схем) класса ОКЦ для задач о существовании, а в разделе 8 – класса ОКЦ для задач на max-Σ.

3. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ МУЛЬТИРАЗРЕЗОВ

3.1. Пусть $w\in R_+^{[V]}$ – некоторая функция, интерпретируемая нами как функция ширины ребер. Для каждого $A\in\,]T[$ определим величину

$$\nu_A^w = \min\{w[X,\bar X] : X\subset V,\ X\cap T=A\}, \qquad (3.1)$$

т.е. функция $\nu^w\in R_+^{]T[}$ может рассматриваться как функция пропускных способностей соответствующих минимальных разрезов потоковой сети (V,T,w).

Предложение 3.1. Если $w,w',w''\in R_+^{[V]}$ и $w=w'+w''$, то $\nu^w\geq\nu^{w'}+\nu^{w''}$.

Доказательство очевидно □

Скажем, что функция $w\in R_+^{[V]}$ имеет CS-разложение $\{w',w''\}$ (где $w',w''\in R_+^{[V]}$), если $w=w'+w''$ и $\nu^w|_{CS}=(\nu^{w'}+\nu^{w''})|_{CS}$. Функция w называется CS-простой, если для любого ее CS-разложения $\{w',w''\}$ функции w' и w'' – пропорциональны w, т.е. существуют множители $\beta',\beta''\geq 0$, такие, что $w'=\beta' w$, $w''=\beta'' w$.

3.2. Рассмотрим общую задачу о мультиразрезах $GEN(V,CS,\ell,d,b,a)$. Она может быть записана в виде следующей линейной программы:

$$\sum(\alpha_X\rho_X^V : X\in\,]V,CS[) \leq \ell, \qquad (3.1)$$

$$-\sum(\alpha_X : X\subset V,\ X\cap T=A)\leq -d_A,\quad A\in CS, \qquad (3.2)$$

$$\alpha\in R_+^{]V,CS[}, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{A\in CS} b_A \sum(\alpha_X : X\subset V,\ X\cap T=A) - a\cdot\sum(\alpha_X\rho_X^V : X\in\,]V,CS[)\to \max. \qquad (3.4)$$

Обозначим двойственный вектор для (3.1) через $\psi\in R_+^{[V]}$ и для (3.2) – через $\gamma\in R_+^{CS}$. Выпишем задачу, двойственную к (3.1) – (3.4) (в векторном виде):

$$\psi[X,\bar X]-\gamma_A\geq b_A-a[X,\bar X],\qquad X\subset V,\ A\in CS,\ X\cap T=A, \qquad (3.5)$$

$$\psi\in R_+^{[V]},\quad \gamma\in R_+^{CS}, \qquad (3.6)$$

$$\ell\cdot\psi-d\cdot\gamma\longrightarrow \min. \qquad (3.7)$$

Обозначим функцию $\psi+a$ через w. Из (3.5) следует $\nu_A^w\geq\gamma_A+b_A$ для всех $A\in CS$. Таким образом, (3.5) – (3.7) приводится к следующему эквивалентному виду:

$$w \geq a, \tag{3.8}$$

$$\nu^w|_{CS} \geq b, \tag{3.9}$$

$$\ell \cdot (w-a) - d \cdot (\nu^w|_{CS} - b) \to \min. \tag{3.10}$$

Применяя теорему двойственности линейного программирования задачам (3.1) - (3.4) и (3.5) - (3.7), получаем следующую теорему.

<u>Теорема 3.1</u>.

$$\max\{-\infty, b \cdot \delta^\alpha - a \cdot \lambda^\alpha\} = \min\{\ell \cdot (w-a) - d \cdot (\nu^w|_{CS} - b)\}, \tag{3.11}$$

где максимум берется по всем мультиразрезам $\alpha :]V, CS[\to R_+$, таким, что $\lambda^\alpha \leq \ell$ и $\delta^\alpha \geq d$, а минимум - по всем функциям $w \in R_+^{[V]}$ таким, что $w \geq a$ и $\nu^w|_{CS} \geq b$ □

3.3. Для задачи о существовании $EX(V, CS, \ell, d)$ из теоремы 3.1 мы сразу же получаем следующее утверждение.

<u>Следствие 3.1</u>. Задача $EX(V, CS, \ell, d)$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой функции $w \in R_+^{[V]}$ выполняется

$$\ell \cdot w - d \cdot \nu^w|_{CS} \geq 0 \quad \square \tag{3.12}$$

Если функция ширины w имеет CS-разложение $\{w_1, w_2\}$, то при выполнении неравенств $\ell \cdot w_i - d \cdot \nu^{w_i}|_{CS} \geq 0,\ i=1,2$, выполняется и (3.12). Таким образом справедливо

<u>Следствие 3.2</u>. Задача $EX(V, CS, \ell, d)$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой CS-простой функции w выполняется неравенство (3.12) □

Используя средства линейного программирования, легко показать, что для фиксированных V и CS число CS-простых функций (рассматриваемых с точностью до пропорциональности) - конечное. Можно показать также, что для каждой CS-простой функции w' существуют такие $\ell \in R_+^{[V]}$ и $d \in R_+^{CS}$, что неравенства (3.12) выполняются для всех CS-простых функций w, не пропорциональных w', а для $w = w'$ это неравенство нарушается. Таким образом, если на ℓ и d не наложено никаких дополнительных условий, то для установления разрешимости задачи $EX(V, CS, \ell, d)$ необходимо и достаточно убедиться в справедливости конечного числа неравенства (3.12) для всех (с точностью до пропорциональности) простых функций.

В разделе 4 мы рассмотрим некоторые виды CS-простых функций ширины. В частности, CS-простой функцией является функция $w = \theta_L$, где $L \in \mathcal{L}^{V,T}$ - правильная цепь (определение см. в разделе 1), такая, что $u_L \in [A, T \setminus A]$ для некоторого $A \in CS$. Для такой функции w справедливо $\nu_A^w = 1$ при $u_L \in [A, T \setminus A]$ и $\nu_A^w = 0$ - в противном случае, и неравенство (3.12) принимает вид

$$\ell_L - \sum (d_A : A \in CS,\ u_L \in [A, T \setminus A]) \geq 0. \tag{3.13}$$

Для произвольного $u \in [T]$ рассмотрим неравенство

$$\mu_\ell(u) \geq \sum (d_A : A \in CS,\ u \in [A, T \setminus A]). \tag{3.14}$$

Очевидно, из выполнения неравенства (3.14) следует справедливость (3.13) для любой правильной цепи L, такой, что $u_L = u$. Легко показать обратное: при выполнении (3.13) для всех $L \in \mathcal{L}^{V,T}$ неравенства (3.14) справедливы для всех $u \in [T]$.

<u>Определение</u>. Скажем, что схема $CS \subseteq]T[$ (а также множество задач $EX(CS)$) принадлежат классу ОКЦ относительно задач о существовании (или, сокращенно, <u>EX-ОКЦ-классу</u>), если задача $EX(V, CS, \ell, d)$ имеет решение для любого $V \supseteq T$ и любых $\ell \in R_+^{[V]}$ и $d \in R_+^{CS}$, удовлетворяющих неравенству (3.14) для всех $u \in [T]$.

("Класс ОКЦ" - это сокращение от "класс схем, для которых ответ любой задачи полностью обусловлен длинами <u>кратчайших цепей</u>, соединяющих полюса сети").

Полное описание EX-ОКЦ-класса будет дано в разделе 7.

3.4. Применяя теорему 3.1 к задаче на $\max$-Σ $\Sigma(V, CS, \ell) = GFN(V, CS, \ell, 0, 1, 0)$, мы получаем следующее утверждение.

<u>Следствие 3.3.</u> Для сети $N = (V, T, \ell)$ и схемы $CS \subseteq]T[$ справедливо

$$\Sigma^{N,CS} = \min\{\ell \cdot w : w \in R_+^{[V]},\ \nu_A^w \geq 1 \text{ для всех } A \in CS\} \quad \square \tag{3.15}$$

Пусть $\mathcal{L} = \{L^u : u \in [T]\}$ - некоторая совокупность цепей, таких, что $u_{L^u} = u$, и пусть $\beta \in R_+^{[T]}$ удовлетворяет условию

$$\sum (\beta(u) : u \in [A, T \setminus A]) \geq 1 \quad \text{для каждого } A \in CS. \tag{3.16}$$

Тогда для функции $w = \sum (\beta(u) \theta_{L^u} : u \in [T])$ справедливо $\nu_A^w \geq 1$ для любого $A \in CS$ и из (3.15) следует

$$\Sigma^{N,CS} \leq \ell \cdot w = \sum (\beta(u) \ell_{L^u} : u \in [T]).$$

Рассматривая в качестве $\mathcal{L}$ совокупность кратчайших цепей, мы получаем

$$\Sigma^{N,CS} \leq \min\{\Sigma(\beta(u)\mu_\ell(u) : u\in[T])\}, \qquad (3.17)$$

где минимум берется по всем $\beta\in R_+^{[V]}$, удовлетворяющим (3.16).

<u>Определение.</u> Схема $CS\subseteq]T[$ (а также множество задач $\Sigma(CS)$) считается принадлежащей классу ОКЦ относительно задач на $\max$-Σ (или, сокращенно, <u>Σ-ОКЦ-классу</u>), если для любой сети $N=(V,T,\ell)$ (т.е. при любых $V\supseteq T$ и $\ell\in R_+^{[V]}$) неравенство (3.17) обращается в равенство.

Легко видеть, что схемы CS_1 и CS_2 для задач о максимальной упаковке однопродуктовых разрезов, рассмотренных в разделе 2.2. принадлежат Σ-ОКЦ-классу. Этому же классу принадлежит схема $CS=\{(s): s\in T\}$ (для любого $|T|\geq 2$), состоящая из "однополюсных" разрезов. Действительно, пусть $\beta[st]$ – переменная, сопоставляемая ребру $[st]\in[T]$, и ξ_s – переменная, сопоставляемая полюсу $s\in T$. Выпишем следующую пару двойственных друг другу задач линейного программирования (3.18) – (3.20) и (3.21) – (3.23) :

$$\xi_s+\xi_t\leq \mu_\ell[st], \qquad [st]\in[T], \qquad (3.18)$$

$$\xi\in R_+^T, \qquad (3.19)$$

$$\Sigma(\xi_s : s\in T)\to\max; \qquad (3.20)$$

$$\Sigma(\beta[st] : t\in T\setminus\{s\})\geq 1, \quad s\in T, \qquad (3.21)$$

$$\beta\in R_+^{[T]}, \qquad (3.22)$$

$$\Sigma(\beta[st]\mu_\ell[st] : [st]\in[T])\to\min. \qquad (3.23)$$

Задачи (3.18) – (3.20) и (3.21) – (3.23) хорошо известны, и существуют эффективные алгоритмы их решения, дающие полуцелочисленное решение для задачи (3.21) – (3.23) и – в случае целочисленности μ_ℓ – полуцелочисленное решение задачи (3.18) – (3.20). Пусть ξ^* – оптимальное решение задачи (3.18) – (3.20). Определим мультиразрез π (в форме потенциалов) как $\pi_{\{s\}}(s)=0$, $\pi_{\{s\}}(x)=\min\{\mu_\ell[sx], \xi_s\}$ $(x\in T\setminus\{s\})$ для каждого $s\in T$. Из (3.18) следует $\lambda^\pi\leq\ell$, а из равенства $\|\pi\|=\Sigma(\delta^\pi_{\{s\}} : s\in T)=$ $=\Sigma(\xi_s : s\in T)$ следует, что π – оптимальное решение рассматриваемой задачи.

Полное описание Σ-ОКЦ-класса будет дано в разделе 8.

3.5. При помощи стандартных средств линейного программирования нетрудно показать, что задача о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости $COST(V,CS,\ell,a)$ эквивалентна задаче $GEN(V,CS,\ell,0,\beta^M,a)$ (где $\beta^M_A=M$, $A\in CS$) для любого M, большего некоторого положительного числа $M(\ell,a)$, зависящего от ℓ и a. Положим

$$\Sigma^{N,CS,a}_M = \max\{M\|\alpha\|-a\cdot\lambda^\alpha : \alpha\in R_+^{]V,CS[}, \lambda^\alpha\leq\ell\}$$

(где N обозначает сеть (V,T,ℓ)) . Из теоремы 3.1 следует

$$\Sigma^{N,CS,a}_M = \min\{\ell\cdot(w-a) : w\in R_+^{[V]}, w\geq a, \nu^w|_{CS}\geq\beta^M\}. \qquad (3.24)$$

Пусть $\gamma : \mathcal{L}^{V,T}\to R_+$ – функция, удовлетворяющая

$$\Sigma(\gamma_L : L\in\mathcal{L}^{V,T}, u_L\in[A,T\setminus A])\geq M(\ell,a) \quad \text{для всех } A\in CS, \qquad (3.25)$$

и пусть $\tilde w\in R_+^{[V]}$ – функция, для которой $\Sigma^{N,CS}=\ell\cdot\tilde w$ и $\nu_A^{\tilde w}\geq 1$ для каждого $A\in CS$. Положим $w^1=\Sigma(\gamma_L\theta_L : L\in\mathcal{L}^{V,T})$, $w^2(e)=\max\{w^1(e), a(e)\}$ $(e\in[V])$, $w_M=w^2+(M-M(\ell,a))\tilde w$. Тогда для произвольного $M>M(\ell,a)$, ввиду (3.24), (3.25) и (3.17), мы получаем $w_M>w^2\geq a$, $\nu^{w_M}|_{CS}\geq\beta^M$ и

$$\Sigma^{N,CS,a}_M\leq\ell\cdot(w_M-a)=\ell\cdot(\Sigma(\gamma_L\theta_L : L\in\mathcal{L}^{V,T})-a)^+ +(M-M(\ell,a))\Sigma^{N,CS} \qquad (3.26)$$

(где f^+ обозначает функцию, принимающую значения $f^+(s)=\max\{f(s), 0\}$, $s\in S$, для произвольной функции $f\in R^S$.

<u>Определение</u>. Скажем, что схема $CS\subseteq]T[$ принадлежит ОКЦ-классу относительно задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости (или, сокращенно, <u>COST-ОКЦ-классу</u>), если она принадлежит Σ-ОКЦ-классу и для любых $V\supseteq T$, $\ell\in R_+^{[V]}$ и $a\in R_+^{[V]}$ неравенство (3.26) обращается в равенство при некотором γ, удовлетворяющем (3.25).

Можно показать, что для оптимальной функции γ (т.е. обращающей (3.26) в равенство) имеется такая функция $\ell'\leq\ell$, что $\Sigma^{N',CS,a}_M=\Sigma^{N,CS,a}_M$ для любого $M>M(\ell,a)$ (где $N'=(V,T,\ell')$) причем каждая цепь L, для которой $\gamma_L>0$, является кратчайшей цепью в сети N'. Это делает уместным употребление термина "класс ОКЦ" в данном определении.

В разделе 8 будет указана одна серия схем, принадлежащих COST-ОКЦ-классу.