НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ
"ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ
НАРОДНЫМ ХОЗЯЙСТВОМ"

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
ИМ.В.В.КУЙБЫШЕВА

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.И.Я.ФРАНКО
ДРОГОБЫЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ.И.Я.ФРАНКО

Т Р У Д Ы
ТРЕТЬЕЙ ЗИМНЕЙ ШКОЛЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

24 января - 3 февраля 1970 г.
г.Дрогобыч

В Ы П У С К II

М о с к в а
1970 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭКОНОМНЫЙ АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ БИКОМПОНЕНТ ГРАФА

А.В.КАРЗАНОВ

<u>Определение</u>. В /не/ориентированном графе G вершины A и B называются циклически эквивалентными, если существует /не/ориентированный цикл, проходящий через и B. Таким образом, множество Q вершин графа разбивается на классы циклической эквивалентности, называемые бикомпонентами графа.

В докладе излагается алгоритм нахождения бикомпонент связного графа без кратных ребер и попутно /не увеличивая оценки количества действий/ построения графа Герца /т.е. ациклического факторграфа/.

Число действий – $C \cdot p$, где p – число ребер в G, C – общая константа, что равно оценке снизу.

I. <u>Случай неориентированного графа</u>

Пусть граф G задан перечнем вершин Q и для каждой $A \in Q$ задан упорядоченный список $n(A)$ смежных с A вершин.

Нашей целью будет построение некоторого обхода графа. Будем для удобства задавать обход списком P вершин. Каждая вершина из Q может входить в P несколько раз, поэтому условимся вершины в P обозначать буквами без черты, а в Q /так сказать, из "типы"/ с чертой.

Возьмем первую вершину $\bar{A}_1 \in Q$ и образуем начало списка P /вершина A_1 /.

Пусть в P уже i элементов. Тогда A_{i+1} – это элемент $n(\bar{A}_i)$ с наименьшим порядковым номером из тех, которые еще не встречались в P /если такие существуют/.

Если такого элемента в $n(\bar{A}_i)$ нет /список $n(\bar{A}_i)$ назовем тогда заполненным/, то найдем $p_i = \min\{k \,/\, |\bar{A}_k \in n(\bar{A}_i), A_k \neq A_{i-1}\}$ и пойдем по списку P последовательно назад. Прекращаем идти назад: а/ встретив вершину A_j, список $n(\bar{A}_j)$ которой незаполнен; б/ встретив такую вершину A_j, $n(\bar{A}_j)$ уже заполнен, $j \geq p_i$ и для $\forall m \geq j$, из $\bar{A}_s = \bar{A}_m$ и следует $s \geq j$.

В случае а/ Продолжим список P, взяв A_{i+1} такую, что $A_{i+1} = A_j$ и далее – в соответствии с алгоритмом, а чтобы нам не ходить назад еще когда-нибудь по участку $A_j \div A_i$ поставим в A_{i+1} указание об обходе на A_{j-1} /если, конечно, $j \neq 1$ /. Для участка $A_j \div A_i$ будем помнить число $k_i = \min[m\{m / \bar{A}_m = \bar{A}_s, j < s\}; p_i; k_l$, где $j < l < i$ (т.е. -числа участков внутри $A_j \div A_i$)]

В случае б/ В качестве A_{i+1} возьмем "тип" A_{j-1}, сделаем в указание об обходе на , а участок назовем массивом $\mathfrak{M}$.

Замечание. Для поиска минимального элемента, отнесенного к пройденному последовательно назад участку, нам не придется проходить ранее пройденные назад участки, а мы пользуемся уже известными для них числами k_i. Построение P заканчивается, когда мы на обратном ходу доходим до A_1, и у нее список тоже оказывается заполненным. Из построения алгоритма, учитывая то, что граф связен, следует присутствие в P вершин любого типа из Q /т.к. списки любой вершины в P заполнены/.

Из алгоритма следует также упорядоченность по включению массивов.

Разобьем множество вершин P на классы O_l : A_i и A_j принадлежат одному классу, если они входят в одни и те же массивы.

Покажем, что если A_i и A_j входят в разные классы, то $\bar{A}_i \neq \bar{A}_j$.

Рассмотрим наименьшие массивы $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$, в которые входят соответственно A_i и A_j. Ясно, что $\mathfrak{M}_i \neq \mathfrak{M}_j$. Пусть $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_j$ /либо $\mathfrak{M}_i$ не пересекается с $\mathfrak{M}_j$ /. Заметим, что вершин, типы встречающихся в $\mathfrak{M}_i$ ет вне него, так как к моменту образования массива $\mathfrak{M}_i$ писки всех вершин в нем заполнены, а до него вершин такого типа нет по условию образования массива. Отсюда $\bar{A}_i \neq \bar{A}_j$. Следовательно, вершины в Q также разбиваются на классы принадлежности O_l.

Покажем, что классы O_l и есть бикомпоненты графа. усть сначала O_k – минимальный класс /т.е. совпадает с инимальным по включению массивом $\mathfrak{M}_k$ /. Пусть A_i – первая вершина массива $\mathfrak{M}_k$ и пусть в $\mathfrak{M}_k$ есть ершины, типы которых принадлежат иным бикомпонентам, м бикомпонента вершины $\bar{A}_i$. Рассмотрим первую такую ершину A_s Первый раз в списке P мы приходим какую-либо вершину обязательно по ребру. С другой стороны ребро $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$ – перемычка, потому что оно разделяет бикомпоненты. Второй раз из $\bar{A}_{s-1}$ в $\bar{A}_s$ мы не попа-м, поэтому перед выходом из бикомпоненты $\bar{A}_s$ в бикомпоненту $\bar{A}_{s-1}$ мы должны обойти все вершины компоненты связности вершины $\bar{A}_s$, полученной после выкидывания ребра $\bar{A}_{s-1}\bar{A}_s$ из G. Но тогда участок $A_s \div A_\tau$, где τ / $\bar{A}_{\tau+1} = \bar{A}_{s-1}$ будет массивом. Этот массив будет внутри $\mathfrak{M}_k$, что невозможно, т.к. $\mathfrak{M}_k$ – минимальный массив.

С другой стороны, $\mathfrak{M}_k$ – в точности бикомпонента, т. . вне $\mathfrak{M}_k$ нет вершин типа входящих в него и смежных с ими, кроме A_{i-1}. Следовательно, для минимального ссива все доказано. Удалив из G бикомпоненту вершины $\bar{A}_i$ /с ребром $\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i$ / мы получим граф G', список торого P' отличается от P в точности отсутствием ответствующего массива. Так индукцией по рангу масси-в доказывается, что $\{O_i\}$ – бикомпоненты.

Заметим еще, что соседство двух классов / т.е. наименьшие массивы $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ соответственно включающие O_i и O_j таковы, что $\mathfrak{M}_i \supset \mathfrak{M}_j (\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_j)$ и $\nexists \mathfrak{M}_k$, что $\mathfrak{M}_i \supset \mathfrak{M}_k \supset \mathfrak{M}_j (\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}_j)$/ и только оно определяет ребро в графе Герца между этими двумя бикомпонентами.

Оценим число действий на построение списка P и массивов:

а/ Число элементов в P меньше $C \cdot p$, т.к. между двумя соседними вершинами A_i и A_{i+1}, где A_{i+1} строится без промежуточного обратного хода по списку P, существует ребро $\bar{A}_i \bar{A}_{i+1}$, которое будет „посмотрено" /в "прямом" направлении/ только один раз. Если же A_{i+1} получено с предварительным обратным ходом, то ей соответствует ребро $\bar{A}_k \bar{A}_{k+1}$, где $\bar{A}_k = A_{i+1}$, A_k - первая вершина образуемого обходного участка, либо A_k - предшествующая в случае массива. В обоих вариантах $\bar{A}_k \bar{A}_{k+1}$ смотрится только один раз /в "обратном" направлении/.

б/ Число действий на отыскание свободных вершин в $n(\bar{A})$ с наименьшим номером в совокупности по всем обращениям к списку $n(\bar{A})$ /пока мы не знаем, заполнен весь список $n(\bar{A})$ или нет/ равно $|n(\bar{A})|$. $\sum_{\bar{A} \in Q} |n(\bar{A})| = 2p$.

в/ Для каждой вершины списка P указывается адрес первой вершины такого же типа в P /константа действий/, а для участков обхода - минимум по всем типам на этом участке /число действий порядка числа элементов участка, считая внутренние участки за один элемент и используя то, что для них минимум посчитан ранее/. Следовательно, суммарное число действий для различения случаев а/ и б/ алгоритма /и следовательно, для образования массивов/ порядка p.

Отсюда общая оценка действий $C \cdot p$.

2. Ориентированный случай

Изменения по сравнению с алгоритмом для неориентированного графа следующие:

а/ Для построения P вместо $n(\bar{A})$ используется список $e(\bar{A})$ концов ребер, исходящих из $\bar{A}$.

б/ Как только образуется массив $\mathfrak{M}$, типы всех его вершин /за исключением принадлежащих массивам внутри $\mathfrak{M}$/ объявляются закрытыми вершинами массива $\mathfrak{M}$ также соответствующего класса.

в/ При рассмотрении списков $e(\bar{A})$ закрытые вершины исключаются из рассмотрения /легко видеть, что соответствующие ребра ведут в уже пройденные компоненты, и циклов не возникает/. Следует только помнить, что компоненты вершины $\bar{A}$ в графе Герца будет соединена с компонентой закрытой вершины ориентированным ребром.

г/ В список P_1 будут входить все вершины, достижимые из $\bar{A}_1$ ориентированным путем /т.е. объединение какого-то количества целых бикомпонент/. Выделим в P_1 бикомпоненты /это $C \cdot p_1$ - где p_1 число ребер в подграфе вершин $P_1 \cap Q$. Берем первую непройденную вершину в Q строим список P_2, считая все вершины P_1 закрытыми. И т.д.. Оценка действий $C \cdot (p_1 + p_2 + \ldots + p_k) = C \cdot p$