АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРОГРАММИРОВАНИЕ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1975

УДК 681.3.06 : 518.5

ПЛАНИРОВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

А. В. Карзанов, И. А. Фараджев

В процессе автоматического синтеза алгоритмов при решении задач на вычислительных моделях [1] возникает проблема поиска минимальной разрешающей системы отношений и разложения найденной системы на подсистемы минимального размера с целью минимизации времени выполнения полученного таким образом алгоритма. В статье предлагается и обосновывается алгоритм решения этой задачи для частного случая простых моделей, состоящих из однородных отношений ранга 1.

1. Понятие вычислительной модели, введенное в работе [1], легло в основу различных систем автоматического программирования с настраиваемой семантикой [2, 3]. Одна из особенностей таких систем заключается в том, что язык, на котором формулируются задачи, не является алгоритмическим. В связи с этим существенной частью систем, реализующих решение задач на вычислительных моделях, является аппарат планирования вычислений, т. е. определения оптимальной в некотором смысле последовательности процедур из заранее выбранного класса, выполнение которой приводит к решению поставленной задачи.

Естественно, что возможности и эффективность работы системы существенно зависят от возможностей и качества работы программного механизма планирования (планировщика). В частности, недостаточная классификация планировщика, описанного в [2], приводит к невозможности решать многие сравнительно простые задачи.

Трудность создания достаточно эффективного универсального алгоритма планирования вычислений связана с широтой понятия вычислительной модели. В данной работе будет описан алгоритм планирования, применимый для узкого, но достаточно важного класса простых моделей, все отношения которой являются однородными отношениями ранга 1.

2. Опишем постановку задачи более формально. *Моделью* $M = (\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{F}})$ называется совокупность множества *переменных* $\tilde{\mathfrak{X}}$ и множества *отношений* $\tilde{\mathfrak{F}}$. С каждым отношением $f \in \tilde{\mathfrak{F}}$ связывается подмножество $\tilde{\mathfrak{X}}(f) \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}$ переменных, входящих в это отношение. Предполагается, что любая переменная $x \in \tilde{\mathfrak{X}}(f)$ может быть вычислена из отношения f, если фиксированы значения всех остальных переменных, связанных с этим отношением (в терминах [1] это как раз и означает, что все отношения — однородные ранга 1).

Фиксируем значения переменных из подмножества $X_{\text{вх}} \subset \tilde{\mathfrak{X}}$. Рассмотрим множество переменных $\mathfrak{X} = \tilde{\mathfrak{X}} - X_{\text{вх}}$, множества $\mathfrak{X}(f) = \tilde{\mathfrak{X}}(f) \setminus X_{\text{вх}}$ и множество отношений $\mathfrak{F}$, состоящее из тех отношений $f \in \tilde{\mathfrak{F}}$, для которых $\mathfrak{X}(f) \neq \phi$. Совокупность $K = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ будем называть *классом задач* на модели M. Для любого подмножества $F \subseteq \mathfrak{F}$ обозначим $\mathfrak{X}(F) = \bigcup_{f \in F} \mathfrak{X}(f)$ и введем понятие *дефекта* $d(F) =$

$= |\mathfrak{X}(F)| - |F|$. Дефектом класса задач назовем величину $d = \min d(F)$. Так как $\phi \in \mathfrak{F}$ и $d(\phi) = 0$, то $d \leqslant 0$. Класс задач назовем *корректно* определенным, если $d = 0$. Если интерпретировать отношения из $\mathfrak{F}$ как независимые уравнения, то требование корректности определения класса является требованием непротиворечивости любой подсистемы уравнений из $\mathfrak{F}$. Непустое множество $F \subseteq \mathfrak{F}$ с $d(F) = 0$ будем называть *критическим*.

Наконец, задача $З = (K, X_{\text{вых}})$ формулируется как совокупность корректно определенного класса $K = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ и множества $X_{\text{вых}} \subseteq \mathfrak{X}$ переменных, значения которых необходимо вычислить. Предположим, что в нашем распоряжении имеется процедура вычисления по критическому множеству отношений F значений всех переменных из множества $\mathfrak{X}(F)$. При интерпретации отношений как независимых уравнений это означает возможность решить систему уравнений, если количество уравнений и количество входящих в них переменных совпадают. Критическое множество отношений $F \subseteq \mathfrak{F}$ будем называть *разрешающей системой* для задачи $З = (K, X_{\text{вых}})$, если $X_{\text{вых}} \subseteq \mathfrak{X}(F)$. Задачу будем называть *разрешимой*, если для нее существует хотя бы одна разрешающая система.

Следует отметить, что введенная таким образом разрешимость систем отношений учитывает только структуру отношений, абстрагируясь от их функциональной природы. Вследствие этого критическое множество отношений может оказаться функционально неразрешимым. Например, система

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

неразрешима вследствие того, что отношение $x + \sqrt{y} = 0$ — частичное [1], т. е. из него можно определить y не при любом x. Кроме того, система будет функционально неразрешима, если она содержит зависимые отношения. При планировании вычислений мы будем игнорировать вопросы функциональной разрешимости, считая, что все отношения полные и независимые.

Первая из рассматриваемых в данной работе задач планирования вычислений заключается в определении разрешимости задачи и в нахождении для разрешимой задачи разрешающей системы минимального размера (задача I.)

Пусть F — разрешающая система отношений. Естественно попытаться свести процедуру решения этой системы к последовательности решения систем отношений меньшего размера и подстановки определившихся значений переменных в остальные отношения. Точнее, рассмотрим разбиение $\{F_i\}$ системы $F : F = \bigcup\limits_i F_i;\ F_i \cap F_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и обозначим $\Phi_i = \bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant i} F_i$. Разбиение $\{F_j\}$ будем называть *блочно-треугольным*, если $d(\Phi_i) = 0$ для всех i. Разбиение $\{F_i\}$ называется *максимальным*, если оно является подразбиением любого другого разбиения $\{F'_j\}$ в том смысле, что для любого F_i найдется F'_j такое, что $F_i \subseteq F'_j$. В работе [4] доказывается, что у любого критического множества есть максимальное блочно-треугольное разбиение. Вторая задача планирования вычислений, рассматриваемая в данной работе, заключается в нахождении максимального блочно-треугольного разбиения разрешающей системы отношений (задача II).

3. Планировщик, описанный в [2], может найти только такую разрешающую систему, для которой блочно-треугольное разбиение состоит из одноэлементных множеств (треугольное разбиение). В этом случае разрешимыми оказываются только те задачи, для которых результат может быть получен путем последовательного решения отно-

шений, но не их систем. В [2] приведены примеры простых задач, для которых разрешающих систем с треугольными разбиением не существует.

Алгоритм решения задачи II приведен в [4], однако в данной работе будет показано, что решения задач I и II тесно связаны, так что существенная часть работы для решения задачи II может быть выполнена во время решения задачи I.

4. Классу задач $K = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ поставим в соответствие его *терм-граф* $G = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R})$ — двудольный граф с долями вершин $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ и множеством ребер $\mathfrak{R}$ вида (x, f) таких и только таких, что $x \in \mathfrak{X}(f)$.

Понятие критического множества, введенное нами, совпадает с понятием критического множества в терм-графе G, соответствующем корректно определенному классу задач (см. [5], гл. 7).

Теорема А. *Если $F_1, F_2 \subseteq \mathfrak{F}$ — критические множества, то множества $F_1 \bigcup F_2$ и $F_1 \bigcap F_2$ также критические.*

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [5]. Из этой теоремы следует, что минимальная разрешающая система для разрешимой задачи единственна и равна пересечению всех разрешающих систем данной задачи.

Подмножество ребер $P \subseteq \mathfrak{R}$ называется *паросочетанием*, если любые два ребра из P не имеют общих концов, т. е. если из $(x_1, f_1) \in P$ и $(x_2, f_2) \in P$ следует $x_1 \neq x_2$ и $f_1 \neq f_2$. Если $(x, f) \in P$, то будем обозначать $x = P(f)$ и $f = P^{-1}(x)$. Соответственно, обозначим $P(F) = \bigcup\limits_{f \in F} P(f)$ при $F \subseteq \mathfrak{F}$ и $P^{-1}(X) = \bigcup\limits_{x \in X} P^{-1}(x)$ при $X \subseteq \mathfrak{X}$. Паросочетание P графа $G = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R})$ называется *полным*, если $|P| = |\mathfrak{F}|$. Размер $\pi(G)$ максимального паросочетания в графе G и дефект соответствующего класса задач связывает следующая

Теорема В

$$\pi(G) = |\mathfrak{F}| + d.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [6]. Следствием этой теоремы является

Критерий корректности определения класса задач: класс задач корректно определен тогда и только тогда, когда в его терм-графе существует полное паросочетание.

Лемма 1. *Если $F \subseteq \mathfrak{F}$ — критическое множество, то любое полное паросочетание P взаимно-однозначно отображает F на $\mathfrak{X}(F)$.*

Доказательство. Из определения полного паросочетания следует $|P(F)| = |F|$ и $P(F) \subseteq \mathfrak{X}(F)$. Но для критического множества $|F| = |\mathfrak{X}(F)|$, откуда следует $P(F) = \mathfrak{X}(F)$, что и доказывает лемму.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи $З = (K, X_{\text{вых}})$ необходимо и достаточно существование критического множества F такого, что $X_{\text{вых}} \subseteq P(F)$ при любом полном паросочетании P.*

Доказательство. Разрешимость задачи З равносильна существованию критического множества F такого, что $X_{\text{вых}} \subseteq \mathfrak{X}(F)$. Но по лемме 1 $P(F) = \mathfrak{X}(F)$ для любого критического множества F и любого полного паросочетания P.

В частности, для разрешимости задачи З необходимо, чтобы $X_{\text{вых}} \subseteq P(\mathfrak{F})$ при произвольном полном паросочетании P.

5. Пусть P — произвольное паросочетание в графе $G = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R})$. Рассмотрим ориентированный двудольный граф $G_P = (\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathfrak{D})$ с множеством дуг $\mathfrak{D}$, получаемый из G следующей ориентацией ребер: ребро $(x, f) \in P$ переходит в дугу $(x, f) \in \mathfrak{D}$, а ребро $(x, f) \in \mathfrak{R} \setminus P$ — в дугу $(f, x) \in \mathfrak{D}$. Пусть $C(x)$ — множество вершин, достижимых из вершины x в графе G_P. Обозначим $C_{\mathfrak{X}}(x) = C(x) \bigcap \mathfrak{X}$ и $C_{\mathfrak{F}}(x) = C(x) \bigcap \mathfrak{F}$.

Для $X \subseteq \mathfrak{X}$ обозначим также $C_{\mathfrak{X}}(X) = \bigcup_{x \in X} C_{\mathfrak{X}}(x)$, $C_{\mathfrak{F}}(X) = \bigcup_{x \in X} C_{\mathfrak{F}}(x)$.

Очевидно, что если $x \in P(\mathfrak{F})$, то $C_{\mathfrak{X}}(x) = \mathfrak{X}(C_{\mathfrak{F}}(x))$ и $C_{\mathfrak{F}}(x) = P^{-1}(C_{\mathfrak{X}}(x))$.

Лемма 2. *Если P — полное паросочетание, $F \subseteq \mathfrak{F}$ — критическое множество и $x \in \mathfrak{X}(F)$, то $C_{\mathfrak{F}}(x) \subseteq F$ и $C_{\mathfrak{X}}(x) \subseteq \mathfrak{X}(F)$.*

Доказательство леммы проведем индукцией по длине пути. Рассмотрим путь из $x \in \mathfrak{X}(F)$ в вершину $z \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{F}$. Пусть последняя дуга этого пути (z', z). Если $z' \in F$, то $z \in \mathfrak{X}(z')$ и, следовательно, $z \in \mathfrak{X}(F)$. Если же $z' \in \mathfrak{X}(F)$, то в силу леммы 1 $z' \in P(F)$ и $z = P^{-1}(z') \in F$, что и завершает доказательство шага индукции.

Поскольку лемма 2 справедлива для любого критического множества с $x \in \mathfrak{X}(F)$, то можно утверждать, что $C_{\mathfrak{F}}(x) \subseteq F^*$, где F^* — минимальное критическое множество такое, что $x \in \mathfrak{X}(F^*)$.

Лемма 3. *Если P — полное паросочетание и $x \in \mathfrak{X}(F)$, где F — некоторое критическое множество, то $C_{\mathfrak{F}}(x)$ — минимальное критическое множество с этим свойством.*

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно доказать, что $C_{\mathfrak{F}}(x)$ является критическим множеством, т. е. что $|C_{\mathfrak{F}}(x)| = |\mathfrak{X}(C_{\mathfrak{F}}(x))|$. Поскольку $x \in \mathfrak{X}(F)$, где F — некоторое критическое множество, то в силу леммы 1 $x \in P(\mathfrak{F})$ и, следовательно, $\mathfrak{X}(C_{\mathfrak{F}}(x)) = C_{\mathfrak{X}}(x) \subseteq \mathfrak{X}(F)$. Но тогда и $\mathfrak{X}(C_{\mathfrak{F}}(x)) \subseteq P(\mathfrak{F})$, откуда ввиду $C_{\mathfrak{F}}(x) = P^{-1}(C_{\mathfrak{X}}(x))$ получается $|C_{\mathfrak{F}}(x)| = |C_{\mathfrak{X}}(x)| = |\mathfrak{X}(C_{\mathfrak{F}}(x))|$.

Теорема 2. *Критическое множество F такое, что $x \in \mathfrak{X}(F)$ существует тогда и только тогда, когда $C_{\mathfrak{X}}(x) \subseteq P(\mathfrak{F})$ при произвольном полном паросочетании P.*

Доказательство. Если критическое множество F с $x \in \mathfrak{X}(F)$ существует, то по лемме 3 $C_{\mathfrak{F}}(x)$ является одним из таких множеств. Но по лемме 1 $\mathfrak{X}(C_{\mathfrak{F}}(x)) = C_{\mathfrak{X}}(x) \subseteq P(\mathfrak{F})$. Обратно, если $C_{\mathfrak{X}}(x) \subseteq P(\mathfrak{F})$, то и $x \in P(\mathfrak{F})$. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3, получим, что $C_{\mathfrak{F}}(x)$ — критическое множество.

Теорема 3. *Задача $З = (K, X_{\text{вых}})$ разрешима тогда и только тогда, когда $C_{\mathfrak{X}}(X_{\text{вых}}) \subseteq P(\mathfrak{F})$ при произвольном полном паросочетании P. В этом случае $C_{\mathfrak{F}}(X_{\text{вых}})$ — минимальная разрешающая система.*

Доказательство этой теоремы немедленно следует из теоремы 2 и теоремы А.

6. Алгоритм решения задачи I заключается, таким образом, в следующем:

а) Строим граф G и находим в нем максимальное паросочетание P. Если $|P| < |\mathfrak{F}|$, класс определен некорректно.

б) Если $X_{\text{вых}} \not\subseteq P(\mathfrak{F})$, то задача неразрешима.

в) Строим граф G_P и находим множества $C_{\mathfrak{F}}(X_{\text{вых}})$ и $C_{\mathfrak{X}}(X_{\text{вых}})$. Если $C_{\mathfrak{X}}(X_{\text{вых}}) \subseteq P(\mathfrak{F})$, то $C_{\mathfrak{F}}(X_{\text{вых}})$ — минимальная разрешающая система отношений, в противном случае задача неразрешима.

Обозначим $m = |\mathfrak{F}|$, $n = |\mathfrak{X}|$ и $p = |\mathfrak{R}| = \sum_{f \in \mathfrak{F}} |\mathfrak{X}(f)|$. Построение графа G требует не более $O(mn)$ действий. Максимальное паросочетание в двудольном графе находится алгоритмом из [4] за $O(p\sqrt{m})$ действий.

Наконец, нахождение вершин, достижимых из $X_{\text{вых}}$ в графе G_p, может быть сделано за $O(p)$ действий.

Таким образом, предлагаемый алгоритм решения задачи I имеет оценку трудоемкости $O(mn + p\sqrt{m})$.

7. Пусть F — критическое множество, P — полное паросочетание в графе G. Рассмотрим ориентированный граф $\Gamma = (F, \mathfrak{D})$, дуги которого получаются из ребер графа G вида $(x, f) \in \mathfrak{R} \setminus P$, $f \in F$ по следующему правилу: каждое ребро указанного вида переходит в дугу $(P^{-1}(x), f) \in \mathfrak{D}$. Пусть $\{F_i\}$ — разбиение вершин графа Γ на компо-

ненты сильной связности и пусть их нумерация согласована с частичным упорядочением вершин графа Герца (см. [6], стр. 246).

Теорема 4. *Разбиение* $\{F_i\}$ — *максимальное блочно-треугольное. Это разбиение единственно с точностью до перестановки блоков, не противоречащей частичному упорядочению вершин графа Герца.*

Доказательство этой теоремы содержится в работе [4]. Таким образом, решение задачи II сводится к выделению компонент сильной связности ориентированного графа и построению его графа Герца. Алгоритмы решения этих задач приведены в [7, 8] и трудоемкость их решения имеет оценку $O(p)$.

8. Проиллюстрируем работу предложенных методов планирования на примере составления алгоритма решения простой задачи. Пусть

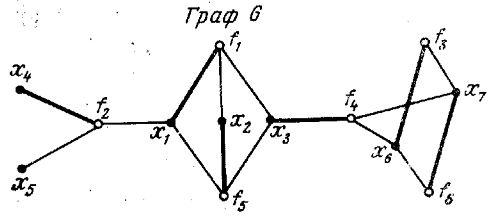

Рис. 1

имеется множество переменных $\mathfrak{X} = \{x_i, i = 1, 2, \ldots, 7\}$, и заданные на $\mathfrak{X}$ отношения $\mathfrak{F} = \{f_j, j = 1, 2, \ldots, 6\}$:

$$f_1 : \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad f_4 : \varphi_4(x_3, x_6, x_7) = 0,$$
$$f_2 : \varphi_2(x_1, x_4, x_5) = 0, \qquad f_5 : \varphi_5(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$f_3 : \varphi_3(x_6, x_7) = 0, \qquad f_6 : \varphi_6(x_6, x_7) = 0$$

и пусть на этой модели требуется определить x_1.

Терм-граф G класса задач $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})$ приведен на рис. 1. Так как в этом графе существует полное паросочетание P (оно отмечено на рис. 1 жир-

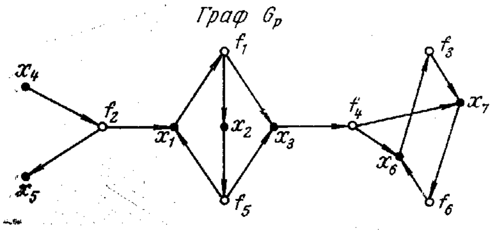

Рис. 2

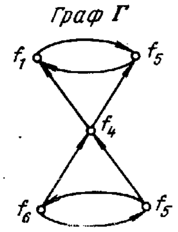

Рис. 3

ными ребрами), то класс задач определен корректно. Из рассмотрения графа G_P, изображенного на рис. 2, видно, что $C_{\mathfrak{X}}(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_6, x_7\}$ покрыто паросочетанием P. Следовательно, задача нахождения x_1 разрешима и $C_{\mathfrak{F}}(x_1) = \{f_1, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ — минимальная разрешающая система. Далее, простроив граф Г (рис. 3), видим, что он имеет три компоненты сильной связности $\{f_3, f_6\}$, $\{f_4\}$ и $\{f_1, f_5\}$. Таким образом, получаем следующий оптимальный алгоритм решения поставленной задачи:

а) из системы отношений $\{f_3, f_6\}$ найти x_6, x_7;

б) подставить x_6, x_7 в f_4 и найти x_3;

в) подставить x_3 в систему $\{f_1, f_5\}$ и найти x_1.

Поступила в редакцию 20.III.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Э. Х. Тыугу.* Решение задач на вычислительных моделях. ЖВМ и МФ, 1970, т. 10, № 3.
2. *Э. Х. Тыугу.* Решатель вычислительных задач. ЖВМ и МФ, 1971, т. 11, № 4.
3. *В. Г. Карпов, В. В. Эпельштейн.* Решатель для задач расчета энергетических установок. В сб.: Проблемно-ориентированные средства машинного проектирования. Таллин, «Бит», 1974.
4. *А. В. Карванов.* О нахождении максимального потока в сетях специального вида и некоторых приложениях. В сб.: Математические вопросы управления производством, вып. 5. Изд-во МГУ, 1973, стр. 81.
5. *О. Оре.* Теория графов. М., «Наука», 1968, стр. 145.
6. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов. Новосибирск, «Наука», 1969, стр. 44.
7. *А. В. Карзанов.* Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа.— Труды III зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, вып. 1. ЦЭМИ, 1970, стр. 343.
8. *И. А. Фараджев.* Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов.— ЖВМ и МФ, 1970, т. 10, № 4.