ВСЕСОЮЗНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СИСТЕМНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

# КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ В ПОТОКОВЫХ ЗАДАЧАХ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 3

МОСКВА 1979

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи о потоках в сетях составляют большой раздел математического программирования и имеют многочисленные приложения в сферах экономики и техники. К наиболее распространенным потоковым задачам относятся: 1) задача о максимальном (стационарном или динамическом) потоке, 2) задача о потоке минимальной стоимости и ее вариант — транспортная задача, 3) задачи о потоках многих продуктов. С математической точки зрения эти задачи допускают двоякую интерпретацию. С одной стороны, они обычно формулируются на языке линейного или линейного целочисленного программирования. С другой стороны, они могут рассматриваться как задачи об упаковках комбинаторных объектов определенного вида — как правило, путей или цепей, соединяющих некоторые полюса сети. Так, например, задача о максимальном потоке эквивалентна задаче о нахождении в данной сети упаковки максимальной мощности, состоящей из путей, ведущих из источника в сток; в сетевой транспортной задаче накладывается дополнительное условие: суммарная стоимость путей должна быть минимальна.

Двоякая интерпретация потоковых задач порождает различные подходы к их решению. Имеющиеся методы решения распадаются на две группы, между которыми, правда, нельзя провести четкой границы. Одну группу образуют алгоритмы, являющиеся переложениями общих методов линейного или линейного целочисленного программирования. Другую группу составляют алгоритмы, использующие разнообразные комбинаторные приемы и средства. В этих алгоритмах применяются способы локальной перестройки объектов текущей совокупности; сами совокупности обычно не отвечают базисам — вершинам соответствующих многогранников, а перестройки — преобразованиям базисов — движениям по ребрам. К таким, комбинаторным, методам можно отнести уже алгоритм Форда и Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, несмотря на то, что в нем преобразуется функция, а не упаковка путей. Для решения ряда задач успешно применяются смешанные методы (например, для задачи о максимальном потоке минимальной стоимости).

Начальное развитие теории и методов решения потоковых задач затрагивало почти исключительно задачи об одном потоке. Эти задачи оказались подходящей областью для разработки и применения комбинаторных методов; к настоящему времени число созданных комбинаторных алгоритмов весьма велико, лучшие из них имеют высокую эффективность, как теоретическую, так и практическую, и заметно превосходят «симплексные» методы. Обилие дискретных приложений, богатство применяемых комбинаторных средств, а также имеющееся, как правило, свойство абсолютной целочисленности говорят о ярко выраженной комбинаторной природе задач об одном потоке.

В области задач о потоках многих продуктов (называемых в сборнике «мультипотоками» вместо громоздкого «многопродуктовые потоки») картина иная. Круг мультипотоковых задач, как и сфера их приложений, шире, чем для случая одного потока. До недавнего времени для их решения развивались почти исключительно «симплексные» методы, им посвящена обширная литература. Комбинаторный подход к задачам о мультипотоках наталкивается на значительные трудности, до сих пор не преодоленные для задач на ориентированных сетях. Комбинаторная природа мультипотоковых задач общего вида выражена довольно слабо, такие задачи по сложности приближаются к общим задачам линейного или линейного целочисленного программирования; характерно и то, что дробность решения «непрерывных» задач не ограничена. Существенным этапом в развитии комбинаторного подхода к задачам на неориентированных сетях явилось введение понятия «графа потоковых отношений» [1], или «потоковой схемы», выделяющего конфигурации пар полюсов, соединяющихся потоками, и введение классификации задач по типу потоковой схемы. Как оказалось, возможность комбинаторного решения зависит не столько от конкретной сети, сколько от вида потоковой схемы, причем число «продуктов» (ребер потоковой схемы) играет далеко не самую главную роль. В последнее время совокупность классов мультипотоковых задач, поддавшихся решению комбинаторными средствами, заметно расширилась. Задачи этих классов отличают ограниченная дробность решения (при целочисленных «пропускных способностях»), а также сравнительная простота двойственных препятствий. Как и для случая одного потока, теоретическая эффективность созданных комбинаторных методов оказалась более высокой, чем «симплексных». В настоящее время комбинаторная теория мультипотоков продолжает развиваться, и можно надеяться на получение новых результатов в этой области, важных как для практического решения задач, так и для теоретического изучения соответствующего раздела дискретной математики.

В предлагаемом сборнике наибольшее число работ посвящено задачам о мультипотоках (I, II, III, V, VIII, IX). В работе I проводится систематическое описание задач о мультипотоках и излагается группа комбинаторных методов, достаточных для решения классов задач, для которых двойственными препятствиями являются разрезы и их линейные комбинации. В работе II дается доказательство необходимости условий важной теоремы, касающейся полного описания классов разрезных задач о мультипотоках максимальной мощности. Изложению новых эффективных методов решения задачи о двух потоках и задачи о максимальном «свободном» мультипотоке посвящена работа V. В работе III исследуются возможности предварительной обработки сети и массового решения задач для случая сетей с 3, 4 и 5 полюсами. В работе VIII решается одна задача о мультипотоках с дополнительным условием целочисленности, задачи такого рода очень трудны для эффективного решения. Наконец, в работе IX приводится решение для обобщения транспортной задачи на мультипотоки — задачи о максимальном «свободном» мультипотоке минимальной стоимости; алгоритм этой работы является первым комбинаторным методом, разработанным для стоимостных мультипотоковых задач.

Работа IV посвящена классической задаче о максимальном потоке. Здесь излагается новый алгоритм решения этой задачи, имеющий трудоемкость $O(n^3)$, а также приводятся результаты большого вычислительного эксперимента автора по сравнению практического быстродействия различных алгоритмов, решающих задачу о максимальном потоке. Работа VI имеет теоретический характер. В ней с новых позиций исследуется структура многогранника задачи о паросочетаниях — «ближайшего родственника» потоковых задач. Работа VII посвящена новому типу потоковых задач — задачам о «ветвлениях», предложенным Дж. Эдмондсом. В этих задачах «пакуемым» объектом является не путь, как в обычных потоковых задачах, а ориентированное дерево, соответствующее передаче единицы информации от источника ко всем пунктам приема.

Обратим внимание читателя на устройство библиографических ссылок. Ввиду повторения многих ссылок в разных работах сборника вся литература вынесена в конец сборника и для нее введена единая нумерация арабскими цифрами. Кроме того, в отдельных статьях имеются ссылки на другие работы сборника, эти ссылки даются римскими цифрами в соответствии с порядком расположения статей в сборнике.

*А. В. Карзанов*

А. В. Карзанов

# КОМБИНАТОРНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ

До недавнего времени основная масса задач о мультипотоках в сетях (обычно называемых многопродуктовыми потоками) поддавалась решению только при помощи общих методов линейного и целочисленного программирования. Комбинаторными методами, более эффективными и теоретически и практически, были охвачены лишь единичные задачи. В последнее время класс таких задач заметно расширился. Были выработаны новые приемы преобразования мультипотоков в неориентированных сетях, позволяющие строить мультипотоки с определенными свойствами и, как следствие, получать решение конкретных задач. С другой стороны, были получены качественные результаты, описывающие характер «узких мест» (двойственных препятствий) сети для различных задач о мультипотоках. Среди многообразия мультипотоковых задач на неориентированных сетях выделялись классы, наиболее подходящие для применения комбинаторных методов. В задачах этих классов требования накладываются только на функцию мощности потоков и функцию общей «нагрузки на магистрали»; двойственные препятствия в этих задачах — это метрики на ребрах сети.

Первая часть статьи (§ 1, 2) может рассматриваться как введение в комбинаторную теорию мультипотоков в неориентированных сетях. В § 1 даются основные определения, описываются эквивалентные способы задания мультипотоков (функциональная, цепная и треугольная формы) и вводятся естественные классы задач; § 2 посвящен доказательству теорем существования и двойственности для задач рассматриваемых типов. В этих теоремах вскрывается двойственность мультипотоков и конечных метрик на основе непосредственной двойственности метрик и элементов мультипотока, заданного в треугольной форме.

Вторая часть статьи посвящена изложению новых методов решения мультипотоковых задач. Эти методы позволяют решать массовые нестоимостные задачи разных типов, в которых ответ зависит только от препятствий Форда-Фалкерсона — разрезов и их линейных комбинаций (задачи такого рода получили название «разрéзных»). В основе предлагаемых методов лежит решение вспомогательной задачи о построении мультипотоков с так называемыми запирающими свойствами. Для решения последней применяется метод преобразования мультипотоков — $D$-операция, обобщающая известные приемы перестройки потоков в мультипотоке вдоль «увеличивающих» путей (§ 3). Параллельно изложению алгоритмов в § 3, 5 приводятся теоретические результаты, в частности, дается полное описание классов разрезных задач

**А. В. Карзанов**

# КОМБИНАТОРНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ

До недавнего времени основная масса задач о мультипотоках в сетях (обычно называемых многопродуктовыми потоками) поддавалась решению только при помощи общих методов линейного и целочисленного программирования. Комбинаторными методами, более эффективными и теоретически и практически, были охвачены лишь единичные задачи. В последнее время класс таких задач заметно расширился. Были выработаны новые приемы преобразования мультипотоков в неориентированных сетях, позволяющие строить мультипотоки с определенными свойствами и, как следствие, получать решение конкретных задач. С другой стороны, были получены качественные результаты, описывающие характер «узких мест» (двойственных препятствий) сети для различных задач о мультипотоках. Среди многообразия мультипотоковых задач на неориентированных сетях выделялись классы, наиболее подходящие для применения комбинаторных методов. В задачах этих классов требования накладываются только на функцию мощности потоков и функцию общей «нагрузки на магистрали»; двойственные препятствия в этих задачах — это метрики на ребрах сети.

Первая часть статьи (§ 1, 2) может рассматриваться как введение в комбинаторную теорию мультипотоков в неориентированных сетях. В § 1 даются основные определения, описываются эквивалентные способы задания мультипотоков (функциональная, цепная и треугольная формы) и вводятся естественные классы задач; § 2 посвящен доказательству теорем существования и двойственности для задач рассматриваемых типов. В этих теоремах вскрывается двойственность мультипотоков и конечных метрик на основе непосредственной двойственности метрик и элементов мультипотока, заданного в треугольной форме.

Вторая часть статьи посвящена изложению новых методов решения мультипотоковых задач. Эти методы позволяют решать массовые нестоимостные задачи разных типов, в которых ответ зависит только от препятствий Форда-Фалкерсона — разрезов и их линейных комбинаций (задачи такого рода получили название «разрéзных»). В основе предлагаемых методов лежит решение вспомогательной задачи о построении мультипотоков с так называемыми запирающими свойствами. Для решения последней применяется метод преобразования мультипотоков — $D$-операция, обобщающая известные приемы перестройки потоков в мультипотоке вдоль «увеличивающих» путей (§ 3). Параллельно изложению алгоритмов в § 3, 5 приводятся теоретические результаты, в частности, дается полное описание классов разрезных задач рассматриваемых типов. Одним из существенных результатов является описание класса разрезных задач о мультипотоках максимальной мощности. В § 4 излагается эффективный алгоритм построения мультипотока с «запирающими» свойствами, позволяющий эффективно решать ряд разрезных задач в произвольных неориентированных сетях.

## § 1. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ

### 1. Определения и обозначения

В этой работе мы будем использовать следующие обозначения:

$|A|$ — число элементов в конечном множестве $A$;

$V$ — конечное множество вершин сети;

$T$ — множество полюсов, $T \subseteq V$;

$\overline{X}$ — множество $V \setminus X$, для $X \subset V$;

$2^M$ — множество всех подмножеств множества $M$;

$(x, y)$ — упорядоченная пара вершин $x$, $y \in V$, при $x \neq y$, называемая *дугой;*

$[x, y]$ — неупорядоченная пара вершин $x$, $y \in V$, при $x \neq y$, называемая *ребром*;

$(X)$ — множество $\{(x, y); x, y \in X\}$, для $X \subseteq V$;

$(X)^d$ — множество $\{(x, y); x, y \in X, x \neq y\}$, для $X \subseteq V$;

$[X]$ — множество $\{[x, y]; x, y \in X\}$, для $X \subseteq V$;

$[X]^d$ — множество $\{[x, y]; x, y \in X, x \neq y\}$, для $X \subseteq V$;

$(X, Y)$ — множество всех пар $(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$;

$[X, Y]$ — множество всех пар $[x, y]$, где одна вершина принадлежит $X$, а другая — $Y$ (при $X \cap Y = \varnothing$, $X \cup Y = V$, т. е. при $Y = \overline{X}$, множество дуг $(X, Y)$ (соответственно, множество ребер $[X, Y]$) называется *упорядоченным разрезом* (соответственно, *разрезом*) на множестве $V$);

$\mathscr{E}$ — евклидово пространство всех действительно-значных функций на $[V]^d$ $\left(\text{имеющее размерность } \frac{|V| \cdot (|V|-1)}{2}\right)$; среди самых важных для нас подмножеств в $\mathscr{E}$ укажем:

$\mathscr{E}_+$ — замкнутый неотрицательный ортант в $\mathscr{E}$;

$\mathscr{M}$ — множество всех метрик в $\mathscr{E}$ (определение см. в § 2);

$\mathscr{F}$ — множество всех функций в $\mathscr{E}$, представляющих разрешимые задачи о допустимости (определение см. в § 2);

$\theta_A$ — индикатор множества $A \subseteq [V]^d$: $\theta_A(e) = 1$ при $e \in A$, $\theta_A(e) = 0$ при $e \in [V]^d \setminus A$;

$\operatorname{supp}(g)$ — носитель функции $g \in \mathscr{E}$ — множество $\{e \in [V]^d;\ g(e) \neq 0\}$;

$g^+$: $g^+(e) = \max\{g(e), 0\}$, $e \in [V]^d$ — для $g \in \mathscr{E}$;

$g^-$: $g^-(e) = |\min\{g(e), 0\}|$, $e \in [V]^d$ — для $g \in \mathscr{E}$ (таким образом $\operatorname{supp}(g^+) \cap \operatorname{supp}(g^-) = \varnothing$, $g = g^+ - g^-$);

$g \cdot h = \Sigma_{e \in [V]^d} g(e) \cdot h(e)$ — скалярное произведение функций $g$, $h \in \mathscr{E}$;

$c$ — функция пропускной способности ребер — $c \in \mathscr{E}_+$;

$d$ — функция требований на мощности потоков — $d \in \mathscr{E}_+$;

$\rho_X$ — индикатор разреза $[X, \overline{X}]$, т. е. функция $\theta_{[X, \overline{X}]}$;

$a[X, Y]$ — величина $\Sigma_{e \in [X, Y]} a(e)$, для $a \in \mathscr{E}$, $X$, $Y \subset V$, $X \cap Y = \varnothing$;

$c\langle X \rangle$ — величина, равная $\min_Z \{c[Z, \overline{Z}]\}$, где $Z \subset V$, $Z \cap T = X$, для $X \subset T$ (минимальная пропускная способность разреза сети, разделяющего $X$ и $T \setminus X$);

$N=(V, T; c)$ — (неориентированная) сеть — объект, состоящий из множества вершин $V$, множества полюсов $T$ и функции пропускной способности $c$;

$S=(T, U)$ — (потоковая) схема (определение в п. 5) — граф с множеством вершин $T$ и множеством ребер $U \subseteq [T]$.

Для дуг и $e=(x,y) \in (V)^d$ может использоваться обозначение $\vec{e}$.

## 2. Цепи и пути

В дальнейшем мы будем пользоваться распространенными терминами «ориентированная цепь», «цепь» и «путь». Уточним их смысл. *Ориентированной цепью* называется чередующаяся последовательность вершин и ребер вида $L=(x_0, e_0, x_1, e_1, \ldots, x_{k-1}, e_{k-1}, x_k)$, где $x_i \in V$, $i \in \overline{0, k}$, и $e_i=[x_i, x_{i+1}] \in [V]^d$. Вершина $x_0$ называется началом, вершина $x_k$ — концом, а $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ — промежуточными вершинами в $L$. Длиной $L$ считается число ребер $k-1$. Если в ориентированной цепи $L$ все ребра различные, то она называется *простой по ребрам,* или *реберно-простой,* если же различны все вершины, кроме, может быть, $x_0$ и $x_k$, то $L$ называется *простой* ориентированной цепью. Ориентированная цепь $L$ с совпадающими началом и концом называется *замкнутой,* или *ориентированным циклом* (при этом в каждом случае из контекста будет следовать, фиксируется ли вершина $x_0=x_k$ в качестве отмеченной вершины — начала цикла — или нет), если к тому же цепь $L$ — простая, то она называется простым ориентированным циклом. Заметим, что цикл $L=(x, e, y, e, x)$ (цикл длины два) также считается простым. Говорят, что ориентированная цепь $\overline{L}=(y_0, u_0, y_1, u_1, \ldots, u_{k-1}, y_k)$ *обратна* ориентированной цепи $L$, если $y_j=x_{k-j}$, $j \in \overline{0, k}$. Рассматривая $L$ и $\overline{L}$ как один и тот же объект, мы приходим к понятию *цепи*. Среди цепей также выделяются реберно-простые и простые цепи, а также циклы и простые циклы.

*Путь* — это чередующаяся последовательность вершин и дуг вида $P=(x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k), x_k)$. Простые (соответственно, простые по дугам) пути — это пути с неповторяющимися вершинами (соответственно, дугами). Понятие пути близко понятию ориентированной цепи (переход осуществляется заменой дуги соответствующим ребром или наоборот). Заметим однако, что ориентированная цепь, соответствующая простому по дугам пути, необязательно является реберно-простой. Пути с совпадающим началом и концом считаются замкнутыми путями, или *контурами.*

То обстоятельство, что некоторые элементы $a, b, \ldots, c$, каждый из которых может быть либо вершиной либо ребром, расположены в указанном порядке на ориентированной цепи $L$ (с началом $x_0$ и концом $x_k$), считая от $x_0$ к $x_k$, будем обозначать символом $\langle x_0, a, b, \ldots, c, x_k \rangle L$; если ориентированная цепь не является простой, эта запись означает наличие в $L$ представителей $a, b, \ldots, c$, следующих в указанном порядке. Аналогичные символы применяются и для цепей и путей. Обозначение цепи $L$, ориентированной цепи $L$ и пути $P$ может сопровождаться указанием их крайних вершин ($x_0$ и $x_k$), в этом случае будет записано, соответственно, $L(x_0, x_k]$, $L(x_0, x_k)$, $P(x_0, x_k)$. Если цепь $L=L[x_0, x_k]$ уже определена, то ее отрезок, заключенный между вершинами $x$ и $y$, обозначается через $L[x, y]$ (если $L$ — не простая цепь, то в тех случаях, когда нами применяется обозначение $L[x, y]$, двусмысленности не возникает). *Произведением* цепей $L=L[r, s]$ и $J=J[s, t]$ (с общим концом $s$) называется цепь $K=K[r, t]=L \cdot J$, получающаяся сращиванием $L$ и $J$ в конечной вершине $s$. Обозначение отрезка и понятие произведения используются также для ориентированных цепей и путей.

Будем обозначать через $\mathcal{L}_{st}$, $\vec{\mathcal{L}}_{st}$, $\mathcal{P}_{st}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$, соответственно, множества цепей с концами $s$ и $t$, ориентированных цепей с началом $s$ и концом $t$, путей с началом $s$ и концом $t$, циклов, контуров на множестве $V$. Через $S\mathcal{L}_{st}$, $\vec{S\mathcal{L}}_{st}$, $S\mathcal{P}_{st}$, $S\mathcal{C}$, $S\mathcal{K}$ будем обозначать подмножества простых объектов соответствующих множеств.

## 3. Двухполюсный поток

*Двухполюсным потоком*, или просто *потоком* на $V$, называется неотрицательная функция $f$, определенная на $(V)^d$ и удовлетворяющая условию *сохранения*

$$\mathrm{div}_f(x) \equiv \Sigma_{y \in V \setminus \{x\}} (f(x, y) - f(y, x)) = 0 \tag{1.1}$$

для всех вершин $x \in V$, кроме, быть может, двух, которые в этом случае называются *полюсами* потока $f$. Полюс $s$ потока $f$, для которого $\mathrm{div}_f(s) > 0$, называется *источником* $f$, тогда как другой — $t$, для которого $\mathrm{div}_f(t) < 0$, называется *стоком* $f$. Неотрицательная величина

$$\| f \| \equiv \mathrm{div}_f(s) = -\mathrm{div}_f(t)$$

называется *мощностью* потока $f$. Поток $f$, для которого во всех вершинах $x$ выполняется $\mathrm{div}_f(x) = 0$, называется *циркуляцией.* Если для потока $f$ определены полюса $s$ и $t$, то применяется обозначение $f_{st}$ (при этом априори допускается возможность $\mathrm{div}_f(s) = \mathrm{div}_f(t) = 0$). В определенных случаях мы будем включать в рассмотрение потоки вида $f_{ss}$ — циркуляции с отмеченным полюсом. Если $[s, t] = e \in [V]^d$, то $f_{st}$ обозначается также $f_e$. Если для потока $f$ полюс $s$ выделен в качестве источника, а полюс $t$ — в качестве стока, $s \neq t$ (опять-таки априори допускается $\mathrm{div}_f(s) = \mathrm{div}_f(t) = 0$), то для $f$ могут использоваться обозначения $f_{(s,t)}$, $\vec{f}_{st}$.

Поток $\bar{f}$, определенный равенством $\bar{f}(x, y) = f(y, x)$, $\forall (x, y) \in (V)^d$, называется обратным относительно $f$, или *обращением* $f$. Очевидно, $\mathrm{div}_{\bar{f}}(x) = -\mathrm{div}_f(x)$ и $\|\bar{f}\| = \|f\|$. С потоком $f$ будет связываться функция *нагрузки* (на ребра) $\zeta_f \in \mathcal{E}_+$, определяемая соотношением

$$\zeta_f[x, y] \equiv f(x, y) + f(y, x); \tag{1.2}$$

очевидно, $\zeta_f = \zeta_{\bar{f}}$.

Пример. Путь $P = (s = x_0, (x_0, x_1), x_1, \ldots, x_k = t)$ порождает поток $\theta_P$, для которого $\theta_P(x, y)$ равно числу вхождений дуги $(x, y)$ в $P$ (т. е. $\theta_P(x, y) = |\{i : (x_i, x_{i+1}) = (x, y),\ i \in \overline{0, k-1}\}|$). Если $s \neq t$, то $\theta_P$ — поток с источником $s$ и стоком $t$ мощности $\|\theta_P\| = 1$; если $s = t$, то $\theta_P$ — циркуляция. Поток $\theta_P$ называется *цепным*, а если путь $P$ — простой, то — элементарным цепным потоком.

Поток $f$ называется *связным*, если носитель $\mathrm{supp}(\zeta_f)$ порождает связной граф, и *ациклическим* или *бесконтурным*, если множество дуг $(x, y) \in (V)$, для которых $f(x, y) > 0$, порождает ориентированный граф без контуров. Будем писать $f \geqslant g$, где $f$ и $g$ — функции, определенные на $(V)^d$, если $f(x, y) \geqslant g(x, y)$, $\forall (x, y) \in (V^d)$. Известную теорему о разложении потока (см. [18,1]) можно изложить в следующем виде.

Теорема 1.1. Пусть $f=f_{(s,t)}$ — поток на $V$ с источником $s$ и стоком $t$ (быть может, $s=t$). Тогда:

а) $f$ допускает представление в виде

$$f=\Sigma_{P\in\mathcal{P}_{st}}\alpha(P)\cdot\theta_P+\Sigma_{K\in\mathcal{K}}\beta(K)\cdot\theta_K,\quad \forall\alpha(P),\ \beta(K)\geqslant 0 \tag{1.3}$$

(*потоковое разложение*, обозначаемое $\{\alpha(P),\ \beta(K)\}$;

б) если поток $f$ — связный, то второе слагаемое в (1.3) может быть опущено;

в) если поток $f$ — ациклический, то существует представление

$$f=\Sigma_{P\in\mathcal{S}\mathcal{P}_{st}}\alpha(P)\cdot\theta_P,\quad \forall\alpha(P)\geqslant 0; \tag{1.4}$$

г) существует ациклический поток $g=g_{(s,t)}$, такой, что $g\leqslant f$ и $\|g\|=\|f\|$;

д) если все значения $f(x,y)$ кратны некоторому $\varepsilon>0$ (так называемый $\varepsilon$-целочисленный поток), то существует представление, для которого все $\alpha(P)$, $\beta(K)$ в (1.3) или все $\alpha(P)$ в (1.4) кратны $\varepsilon$. ■

Замечание 1.1. Получить некоторое разложение $\{\alpha(P),\ \beta(K)\}$ потока $f$ можно при помощи известной процедуры разложения (см. например, [18, 1]). Эти процедуры в общем случае имеют трудоемкость (верхнюю оценку числа действий «абстрактной ЭВМ») — $O(|V|^3)$. Все пути $P$, участвующие в полученном разложении (т. е. при $\alpha(P)>0$) — простые; общее число участвующих цепей и циклов не превосходит $|[V]^d|$.

В дальнейшем мы, как правило, будем иметь дело только со связными потоками. Однако мы не можем ограничиться ациклическими потоками по принципиальным соображениям: каждая из рассматриваемых задач, имеющая решение общего вида, имеет также решение в виде совокупности ациклических потоков, но в промежуточных построениях избежать возникновения неациклических потоков в общем случае нам не удается.

Каждому слагаемому $\alpha(P)\cdot\theta_P$ ($P\in\mathcal{P}_{st}$, $\alpha(P)>0$) какого-либо разложения потока вида (1.3) отвечает объект $\varphi_P=(P,\alpha)$ — *выделенная* ориентированная *потоковая нить*: путь $P$ считается *носителем* нити, а величина $\|\varphi_L\|\equiv\alpha=\alpha(P)$ — ее мощностью. Пара $\varphi_P=(P,\alpha)$, $\alpha>0$ называется ориентированной потоковой нитью потока $f_{(s,t)}$, если $P\in\mathcal{P}_{st}$ и для любой дуги $e\in(V)^d$ выполняется $(\alpha\theta_P)(e)\leqslant f_{(s,t)}(e)$. В случае, когда путь $P$ замкнутый, при выполнении данного неравенства пара $\varphi_L=(P,\alpha)$ называется *нитью-контуром*. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1.1. Каждая ориентированная нить $\varphi_P$ потока $f_{(s,t)}$ является выделенной нитью некоторого его разложения (1.3).

Пара $\tilde{f}=\{f,\bar{f}\}$ образует объект, который мы назовем *неориентированным* потоком, каждый из $f$, $\bar{f}$ является представителем неориентированного потока. В рассматриваемых нами задачах несущественно, какой из потоков — $f$ или $\bar{f}$ — входит в решение, что дает основание говорить о неориентированном потоке, связывающем данную пару полюсов. Неориентированный поток может быть задан в *цепной* форме: пусть $f=f_{(s,t)}$ имеет разложение $\{\alpha(P),\beta(K)\}$. Тогда совокупность пар $\{(L_P,\alpha_P),\ (C_K,\beta_K)\}$ (где $L_P(C_K)$ — цепь (цикл), соответствующая пути $P$ (контуру $K$), $\alpha_P=\alpha(P)>0$, $\beta_K=\beta(K)>0$) определяет цепной поток $\tilde{\varphi}$, соответствующий $\tilde{f}$. Пары $(L,\alpha)$, встречающиеся в $\tilde{\varphi}$, называются его неориентированными нитями, а пары $(C,\beta)$ — нитями-циклами. Неориентированными нитями в $\tilde{f}$ считаются таковые в каком-либо цепном потоке $\tilde{\varphi}$, соответствующем $\tilde{f}$.

## 4. Мультипотоки. Цепная и треугольная формы мультипотока

*Мультипотоком* на множестве $V$ с множеством соединений $U\subseteq[V]$ называется совокупность $F=\{f_u\}$ двухполюсных потоков $f_u=f_{st}$ по одному потоку (который может тождественно равняться нулю) для каждой пары $u=[s,t]\in U$. В рассматриваемых задачах мультипотоки, отличающиеся обращением отдельных входящих в них потоков, не различаются, поэтому, говоря о мультипотоке, мы обычно понимаем класс эквивалентности семейств потоков по отношению обращения. При каждом конкретном рассмотрении мы вольны выбирать поток $f_{(s,t)}$ либо $f_{(t,s)}=\bar{f}_{(s,t)}$, выбор одного варианта автоматически предполагает отсутствие ему противоположного. Заметим также, что множество $U$ может включать пары одинаковых вершин $[s,s]$, т. е. в $F$ допускаются циркуляции с отмеченной вершиной $f_{ss}$. В рассматриваемых нами задачах потоки $f_{ss}$ в окончательном ответе не учитываются, однако такие потоки могут возникать на промежуточных стадиях алгоритмов, описываемых ниже.

С мультипотоком $F=\{f_u;\ u\in U\}$ связываются две функции в $\mathscr{E}_+$:
функция *нагрузки* (на ребра) $\zeta_F:\zeta_E(e)\equiv\Sigma_{u\in U}\zeta_{f_u}(e)$, $e\in[V]^d$,

функция *мощностей* $\delta_F:\delta_F(e)\equiv\begin{cases}\|f_e\|, & e\in U\cap[V]^d,\\ 0, & e\in[V]^d\setminus U.\end{cases}$

*Мощностью* мультипотока $F$ считается величина

$\|F\|\equiv\Sigma_{u\in U\cap[V]^d}\delta_E(u)=\Sigma_{u\in U}\|f_u\|$.

Мультипоток $F$ на множестве $V$ считается мультипотоком *в сети* $N=(V,T;c)$, если

$\operatorname{supp}(\delta_F)\subseteq[T]$ и $\zeta_F\leqslant c$ (1.5),

т. е. $F$ имеет предписанное множество полюсов и удовлетворяет ограничениям пропускных способностей ребер.

Данное нами определение мультипотока есть его определение в функциональной форме. Наряду с этим мы будем рассматривать цепную и треугольную формы мультипотока.

**Цепная форма мультипотока.** Мультипотоком на $V$ с множеством соединений $U\subseteq[V]$, заданным в *цепной* форме, или *цепным мультипотоком*, называется неотрицательная вещественная функция $\varphi$, определенная на множестве $\mathscr{L}_U\cup\mathscr{C}$ (где $\mathscr{L}_U\equiv\bigcup_{[s,t]\in U}\mathscr{L}_{st}$), или иначе — совокупность неориентированных нитей и нитей-циклов

$\Phi=\{\varphi_L=(L,\alpha_L),\ \varphi_C=(C,\alpha_C);\ L\in\mathscr{L}\subseteq\mathscr{L}_U,\ C\in\mathscr{C}'\subseteq\mathscr{C},\ \alpha_L,\alpha_C>0\}$.

Аналогично условию (1.5) цепной мультипоток $\Phi$ считается мультипотоком в сети $N=(V,T;c)$, если $U\subseteq[T]$ и

$$\zeta_\Phi\equiv\Sigma_{L\in\mathscr{L}}\alpha_L\theta_L+\Sigma_{C\in\mathscr{C}'}\alpha_C\theta_C\leqslant c. \tag{1.6}$$

Функция $\zeta_\Phi$ — это функция нагрузки мультипотока $\Phi$. Функция мощности $\delta_\Phi$ определяется так:

$$\delta_\Phi[x,y]=\begin{cases}\Sigma_{L\in\mathscr{L}\cap\mathscr{L}_{xy}}\|\varphi_L\|, & \text{при } [x,y]\in U\cap[V]^d\\ 0, & \text{в остальных случаях;}\end{cases} \tag{1.7}$$

т. е. $\delta_\Phi[x,y]$ — это сумма мощностей нитей в $\Phi$, соединяющих $x$ и $y$. Переход от функционального мультипотока $F$ к цепному осуществляется в соответствии с теоремой 1.1. Обратно, пусть $\Phi=\{\varphi_L,\varphi_C\}$ — цепной мультипоток с множеством соединений $U$. Упорядочим каждую пару $[s,t]\in U$ каким-нибудь образом, скажем $(s,t)$, и образуем потоки

$f_{(s,t)}\equiv\Sigma_{L\in\mathscr{L}\cap\mathscr{L}_{st}}\|\varphi_L\|\cdot\theta_{P(L)}$, где $P(L)$ — путь с началом $s$ и концом $t$, соответствующий цепи $L$ (если $s=t$, то ориентация для пути $P(L)$ определяется произвольно). Произвольно ориентировав каждый цикл $C\in\mathscr{C}'$, образуем контур $K(C)$ и определим циркуляцию

$$f=\Sigma_{C\in\mathscr{C}'}\|\varphi_C\|\cdot\theta_{K(C)}.$$

Мультипоток $F=\{f_{(s,t)}\ f;\ [s,t]\in U\}$ есть функциональный мультипоток, соответствующий Ф. Переход от функционального мультипотока к цепному и обратно осуществляется, вообще говоря, не единственным способом. Однако при таком переходе, как легко видеть, сохраняются функции $\zeta$ и $\delta$.

**Треугольная форма мультипотока.** Рассмотрим следующие функции на $[V]^d$:

а) *орт* $I_u$ — индикатор ребра $u\in[V]^d$:

$$I_u\equiv\theta_{\{u\}}=\begin{cases}1, & e=u\\ 0, & \text{— в противном случае;}\end{cases}$$

б) *треугольник* $\Delta^y_{xz}$ — функция, определяемая ребром $[x,z]\in[V]^d$ и вершиной $y$, отличной от $x$ и $z$:

$$\Delta^y_{xz}(e)=\begin{cases}1, & e=[x,y] \text{ или } [y,z],\\ -1, & e=[x,z],\\ 0, & \text{— в остальных случаях.}\end{cases}$$

Объект, состоящий из ребра $[x,z]$ и вершины $y\,(y\neq x,z)$, назовем *тройкой* и обозначим $t^y_{xz}$.

Пусть $L=(x_0,e_0,x_1,e_1,\ldots,x_k)\,(k\geqslant 2)$ — простая цепь. Тогда, подобно [12], представим функцию $\theta_L-I_u$, где $u=[x_0,x_k]$, в виде

$$\theta_L-I_u=\Sigma_{i=1}^{k-1}\Delta^{x_i}_{x_1x_{i+1}} \tag{1.8}$$

(см. рис. 1; здесь сплошными линиями изображены ребра со значением функции, равным 1, а пунктирными — со значениями —1). Функция $\theta_L-I_u$ допускает, вообще говоря, не единственное представление в виде суммы треугольников.

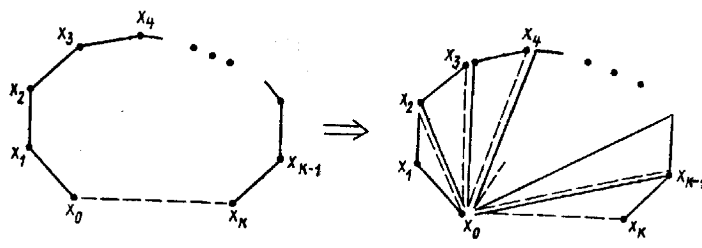


Рис. 1

Лемма 1.1. Пусть $|V|\geqslant 3$ и $C$ — некоторая замкнутая цепь на $V$. Тогда функция $\theta_C$ может быть представлена в виде суммы треугольников.

Доказательство. Достаточно провести его для простого цикла $C$. Если $C=(x_0,e_0,x_1,e_1,x_2,e_2,x_3=x_0)$, то

$$\theta_C=\Delta^{x_1}_{x_0x_2}+\Delta^{x_2}_{x_1x_0}+\Delta^{x_0}_{x_2x_1}. \tag{1.9}$$

Если $C=(x_0,e_0,x_1,e_1,\ldots,x_k=x_0)$, $k>3$, то $\theta_C=\theta_{C'}+(\theta_L-I_{[x_2,x_0]})$, где $C'=(x_0,e_0,x_1,e_1,x_2,[x_1,x_0],x_0)$ и $L=(x_2,l_2,x_3,e_3,\ldots,x_k=x_0)$, и представление следует из (1.8) и (1.9). Наконец, если $C=(x,e,y,e,x)$,

$$\theta_C = \Delta^y_{xz} + \Delta^x_{yz}, \tag{1.10}$$

где $z$ — вершина, отличная от $x$ и $y$.

Пусть $[V]^3$ — совокупность всех троек на $V$.

Мультипотоком на $V$ с множеством соединений $U \subseteq [V]$, заданным в *треугольной* форме, или *треугольным мультипотоком*, назовем неотрицательную вещественную функцию $\pi$, определенную на множестве $[V]^3 \cup (U \cap [V]^d)$ или, иначе, совокупность взвешенных троек и ребер $\Pi = \{\pi^y_{xz} = (t^y_{xz}, \lambda^y_{xz}),\ \pi_{xy} = ([x, y],\ \eta[x, y]);\ t^y_{xz} \in A \subseteq [V]^3,\ [x, y] \in B \subseteq U \cap \cap [V]^d,\ \lambda^y_{xz}, \eta[x, y] > 0\}$, такую, что

$$\zeta_\Pi \equiv \Sigma_{t^y_{xz} \in A} \lambda^y_{xz} \Delta^y_{xz} + \Sigma_{[x,y]B} \eta[x, y]\, I_{[x,y]} \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Треугольный мультипоток $\pi$ считается мультипотоком в сети $N = (V, I; c)$, если

$$\zeta_\Pi \leqslant c \text{ и } U \subseteq [T]. \tag{1.12}$$

За функцию мощности $\delta_\Pi$ мультипотока $\pi$ принимается функция, равная $\eta[x, y]$ для $[x, y] \in B$ и равная нулю — для $[x, y] \in [V]^d \setminus B$, т. е.

$$\delta_\Pi \equiv \Sigma_{[x,y] \in B} \eta[x, y]\, I_{[x,y]}. \tag{1.13}$$

Определим соответствие между треугольной и другими формами мультипотока. Пусть $\Phi = \{\varphi_L, \varphi_C\}$ — цепной мультипоток. Сохраняя функции $\zeta_\Phi$ и $\delta_\Phi$, можно перейти к цепному мультипотоку, все нити $\varphi_L$ которого имеют простые носители $L$ (для этого надо последовательно «упрощать» самопересекающиеся нити, отделяя от них нити-циклы). Заменим каждую нить $\varphi_L = (L, \alpha_L)$ с цепью $L$ не менее чем из двух ребер функцией $\alpha_L \theta_L$ и каждую нить-цикл $\varphi_C = (C, \alpha_C)$ — функцией $\alpha_C \theta_C$; далее представим $\theta_L$ в виде суммы треугольников и орта (согластно (1.10)), а $\theta_C$ — в виде суммы треугольников (согласно лемме 1.1). Нить $\varphi_L = (L, \alpha_L)$ с $L = (x, e, y)$ заменим функцией $\alpha_L I_{[x,y]}$. Приведя подобные члены в общей сумме, мы получим треугольный мультипоток $\Pi$, для которого, как легко доказать, $\zeta_\Pi = \zeta_\Phi$, $\delta_\Pi = \delta_\Phi$.

Предположим один из возможных способов перехода от треугольного мультипотока $\Pi = \{\pi^y_{xz}, \pi_{vw}\}$ к функциональному мультипотоку $E$. Ориентируем произвольным образом каждое из ребер в $[V]^d$, полученное множество дуг обозначим через $M$. На множестве дуг $(V)^d$ введем следующие функции:

$$I_{(x,y)}: I_{(x,y)}(e) = \begin{cases} 1, & e = (x, y), \\ 0, & e = (V)^d \setminus \{(x, y)\} \end{cases} \tag{1.14}$$

(ориентированный орт) и

$$\Delta^y_{(x,z)}: \Delta^y_{(x,z)}(e) = \begin{cases} 1, & e = (x, y) \text{ или } (y, z) \\ -1, & e = (x, z), \\ 0 & \text{— в остальных случаях} \end{cases} \tag{1.15}$$

(ориентированный треугольник). Выделим из $\pi$ «подмультипоток» $\Pi' = \{\pi^y_{xz}\}$, состоящий из всех взвешенных троек (для $\pi'$ неравенство (1.12) может не выполняться, т. е., строго говоря, $\pi'$ — не мультипоток). Для каждой дуги $(x, z) \in M$, такой, что в $\pi'$ существует некоторый $\pi^y_{xz}$, образуем поток $f^0_{xz} \equiv \Sigma_{y: \pi^y_{xz} \in \pi'} \lambda^y_{xz} (\Delta^y_{(x,z)} + I_{(x,z)})$; совокупность этих потоков есть исходный мультипоток $F^0$. Нетрудно проверить, что для $F^0$ выполняется равенство (здесь $\alpha = 0$):

$$\zeta_{F^\alpha}-\delta_{F^\alpha}=\zeta_{\Pi'}\equiv\Sigma_{\substack{ty\\xz}}\lambda^y_{xz}\Delta^y_{xz}. \tag{1.16}$$

Для получения требуемого потока $F$ многократно применяется операция *встраивания* одного потока в другой, состоящая в следующем. Пусть $f'$ и $f''_{(s'',t'')}$ — два потока и пусть выполняется: а) $\min\{f'(s'',t''),\ f'(t'',s'')\}=0$; б) $\zeta_{f'}(s'',t'')=a>0$; в) $\|f''\|=b>0$. Пользуясь процедурой потокового разложения (см. замечание 1.1), выделим из $f''$ подпоток $\tilde f$ мощности $r=\min\{a,b\}$ (если $r=b$, то положим $\tilde f\equiv f''$). Пусть для определенности $f'(s'',t'')=a$ (если $f'(t'',s'')=a$, то переориентируем поток $\tilde f$). Операция встраивания $f''$ в $f'$ состоит в переходе к потокам $\tilde f'$, $\tilde f''$: поток $\tilde f'$ получается из $f'$ «заменой» части потока в дуге $(s'',t'')$ потоком $\tilde f$, т. е. $\tilde f'\equiv f'-a\theta_{(s'',t'')}+\tilde f$, а поток $\tilde f''$ равен $f''-\tilde f$. Заметим, что

$$\zeta_{f'}[x,y[+\zeta_{f''}[x,y]=\zeta_{\tilde f'}[x,y]+\zeta_{\tilde f''}[x,y],$$
$$\forall[x,y]\in[V]^d\setminus\{[s'',t'']\}, \tag{1.17}$$
$$\zeta_{f'}[s'',t'']+\zeta_{f'}[s'',t'']-\|f''\|=\zeta_{\tilde f'}[s'',t'']+\zeta_{\tilde f''}[s'',t'']-\|\tilde f''\|. \tag{1.18}$$

Пусть уже получен мультипоток $F^i=\{f^i_{(s,t)},g^i;\ (s,t)\in M^i\subseteq M\}$, такой, что выполнены следующие условия (здесь $\alpha=i$): (А) $g^\alpha$ — циркуляция; (Б) для любого $f^\alpha_{(s,t)}$ справедливо $\zeta_{f^\alpha_{(s,t)}}[s,t]=0$, $\min\{f^\alpha_{(s,t)}(x,y),\ f^\alpha_{(s,t)}(y,x)\}=0$, $\forall[x,y]\in[V]^d$ и (В) для $F^i=F^\alpha$ выполняется равенство (1.16) (при $\alpha=0$ условия (А)—(В), очевидно, удовлетворяются). Пусть имеется ребро $[s'',t'']\in[V]^d$, такое, что $\zeta_{F^i}[s'',t'']>0$, $\delta_{F^i}[s'',t'']>0$, и пусть для определенности $(s'',t'')\in M$. Тогда в $F^i$ имеется поток $f''=f^i_{(s'',t'')}:\|f''\|=\delta_{F^i}[s'',t'']$ и набор потоков $\{f'_1,f'_2,\ldots,f'_l\}$, таких, что $\zeta_{f'_j}[s'',t'']>0$, $\Sigma^l_{j=1}\zeta_{f'_j}[s'',t'']=\zeta_{F^i}[s'',t'']$ ($f'_j$ может быть как потоком $f^i_{(s,t)}$, так и циркуляцией $g^i$). Будем производить операцию встраивания потока $f''$ поочередно в потоки $f'=f'_1,f'_2,\ldots$ до тех пор, пока либо не уничтожится поток $f''$ (при $\delta_{F^i}[s'',t'']\leqslant\zeta_{F^i}[s'',t'']$) либо не исчерпается весь набор $\{f'_j\}$ (при $\zeta_{F^i}[s'',t'']<\delta_{F^i}[s'',t'']$). В результате, как следует из (1.17), (1.18), значения функций $\zeta$ и $\delta$ сохранятся на всех ребрах, кроме $[s'',t'']$, а для ребра $[s'',t'']$ будет $\min\{\zeta[s'',t''],\ \delta[s'',t'']\}=0$ и величина $\zeta[s'',t'']-\delta[s'',t'']$ останется прежней. Предположим, что для какого-нибудь из измененных потоков $\tilde f'=f^i_{(s,t)}$ нарушилось условие (Б). В случае $\tilde f'(x,y)>0$, $\tilde f'(y,x)>0$ «отделим» от $\tilde f'$ циркуляцию по контуру $(x,(x,y),y,(y,x),x)$, присоединив ее к $g$, т. е. положим $\tilde f':=\tilde f'-\varepsilon\theta_{(x,y)}-\varepsilon\theta_{(y,x)}$, $g^i:=g^i+\varepsilon\theta_{(x,y)}+\varepsilon\theta_{(y,x)}$ (где $\varepsilon=\min\{\tilde f'(x,y),\ \tilde f'(y,x)\}$. В случае $\tilde f'(t,s)>0$, пользуясь процедурой потокового разложения, выделим из $\tilde f'$ циркуляцию $\tilde g'$ с $\tilde g'(t,s)=\tilde f'(t,s)$ (такая циркуляция найдется, поскольку $\|\tilde f'\|=\operatorname{div}_{\tilde f'}(s)>0$). В случае $\tilde f'(s,t)>0$ положим $\tilde f'(s,t):=\tilde f'(s,t)-\min\{\tilde f'(s,t),\ \|\tilde f'\|\}$, в результате либо для нового $\tilde f'$ при $\|\tilde f'\|>0$ будет выполнено условие (Б) либо $\tilde f'$ станет циркуляцией, которую прибавим к $g^i$. Окончательный мультипоток обозначим $F^{i+1}=\{f^{i+1}_{(s,t)},g^{i+1};\ (s,t)\in M^{i+1}\subseteq M\}$. Для $F^\alpha=F^{i+1}$ будут выполнены условия (А)—(В), кроме того, справедливо $\delta_{F^{i+1}} \leqslant \delta_{F^i}$ и $\min\{\zeta_{F^{i+1}}[s'', t''], \delta_{F^{i+1}}[s'', t'']\}=0$.

Таким образом, не более чем за $k \leqslant |V|^d$ операций мы получим мультипоток $F^k$, для которого соблюдается равенство (1.16), а также верно:

$$\min\{\zeta_{F^k}[x, y], \delta_{F^k}[x, y]\}=0. \tag{1.19}$$

Из (1.16), (1.19) следует

$$\zeta_{F^k}=\zeta^{+}_{\Pi'}, \quad \delta_{F^k}=\zeta^{-}_{\Pi'}. \tag{1.20}$$

Искомый мультипоток $F=\{f_{(s,t)}, g\}$ получается из $F^k$ путем прибавления к каждому потоку $f^{(k)}_{(s,t)}$, $[s, t]\in B$ «прямого» подпотока $(\eta[s, t]-\|f^k_{(s,t)}\|)\cdot I_{(s,t)}$. Для $F$ мы имеем

$$\zeta_F=\zeta_{F^k}+\Sigma_{[s,t]\in B}(\eta[s, t]-\|f^k_{st}\|)\cdot I_{[s,t]}=\zeta^{+}_{\Pi'}-\zeta^{-}_{\Pi'}+$$

$$+\Sigma_{[s,t]\in B}\eta[s, t]\, I_{[s,t]}=\zeta_{\Pi};$$

$$\delta_F=\delta_{F^k}+\Sigma_{[s,t]\in B}(\eta[s, t]-\|f^k_{st}\|)\cdot I_{[s,t]}=\zeta^{-}_{\Pi'}-$$

$$-\Sigma_{[s,t]\in B}\|f^k_{(s,t)}\|\cdot I_{[s,t]}+\Sigma_{[s,t]\in B}\eta[s, t]\, I_{[s,t]}=\delta_{\Pi}.$$

Установленные соответствия между разными формами мультипотоков выражает следующая

Теорема 1.2. Для каждого функционального мультипотока $F$ существуют (вообще говоря, не единственные) цепной мультипоток $\Phi$ и треугольный мультипоток $\Pi$, такие, что $\zeta_E=\zeta_{\Phi}=\zeta_{\Pi}$, $\delta_F=\delta_{\Phi}=\delta_{\Pi}$. Имеются эффективные (полиномиальные от $|V|$) процедуры перехода от $F$ к $\Phi$ и к $\Pi$. Аналогичные утверждения справедливы и для любого цепного и треугольного мультипотока (в случае цепного мультипотока $\Phi$ процедура перехода полиномиальна от общего числа ребер в нитях-циклах в $\Phi$).

В дальнейшем каждый раз будет выбираться та форма задания мультипотока, которая наиболее удобна для изложения.

## 5. Задачи о мультипотоках

Следуя [10], приведем формулировки задач, которые мы будем рассматривать в качестве *основных* задач о мультипотоках. Эти задачи отличает то обстоятельство, что в них накладываются требования только на функции нагрузки $\zeta$ и мощности — $\delta$. В самом общем виде — это задача, которую мы будем обозначать $\langle a, b \mid c, d\rangle$: на множестве $[V]^d$ заданы функции $a$, $b$, $c$, $d\in\mathscr{E}_+$; требуется найти мультипоток $F$ на $V$, удовлетворяющий ограничениям на пропускные способности ребер и требованиям на мощности

$$\zeta_F \leqslant c, \ \delta_F \leqslant d \tag{1.21}$$

и максимизирующий форму

$$b\cdot\delta_F - a\cdot\zeta_F \tag{1.22}$$

(здесь $b[s, t]$ имеет смысл «премии за доставку» единицы мощности от $s$ к $t$ или наоборот, а $a[x, y]$ — платы за провоз каждой единицы потока по ребру $[x, y]$, причем эта плата не зависит от вида потока и направления провоза). Различаются следующие частные случаи задачи $\langle a, b \mid c, d\rangle$.

**А. Задача о допустимости** $<c,d>$: для данных функций $c, d \in \mathscr{E}_+$ найти (в смысле, который колеблется между «построить с полиномиальной трудоемкостью» и «доказать существование») мультипоток, удовлетворяющий неравенствам (1.21) (*допустимый* мультипоток). Пара функций $(c, d) \in \mathscr{E}_+ \times \mathscr{E}_+$ называется *совместной*, а задача $<c, d>$ — *разрешимой*, если такой мультипоток существует. Как оказывается, возможность эффективного алгоритмического решения задачи $<c, d>$ связана не столько с конкретными числами $c(e)$ и $d(e)$, сколько с тем, какой подграф порождает множество ребер с требованиями $d$, отличными от 0. Фиксируя граф (*потоковую схему*) $S=(T, U)$, мы определяем *массовую* задачу $<\mathrm{Ex}, S>$ — задачу о допустимости со схемой $S$ — состоящую (в сильном смысле) в построении алгоритма с определенными критериями качества (например, с полиномиальной трудоемкостью), который для произвольного множества $V$ и функций $c, d \in \mathscr{E}_+$*, $\mathrm{supp}(d) \subseteq U$ отыскивает допустимый мультипоток либо показывает несовместность $c$ и $d$.

**Б. Задача о максимальном взвешенном мультипотоке** $<b|c>$: найти мультипоток $F$, удовлетворяющий ограничению пропускной способности $\zeta_F \leqslant c$ и максимизирующий форму $b \cdot \delta_F$. Здесь $b=b[s, t]$ — это функция сравнительной ценности отдельных потоков в $F$. Среди задач $<b|c>$ наибольший интерес представляют задачи следующих двух видов.

1) Задача $<b|c>$, в которой функция $b$ является метрикой $T \subseteq V$ (определение см. в § 2). В этом случае решение обладает рядом интересных свойств, некоторые из них выявляются в § 3.

2) *Задача на* max-$\Sigma$, в которой $b=\theta_U$, где $U$ — множество ребер потоковой схемы $S=(T, U)$. В этой задаче потоки $f_u$ с $u \in [V]^d \setminus U$ не учитываются, а потоки $f_u$ с $u \in U$ ценятся одинаково. Для данной задачи применяется обозначение $<S, c>$, мультипоток, решающий ее, называется $S$-максимальным, или $U$-максимальным. В том случае, когда $U=[T]^d$, оптимальный мультипоток называется также $T$-максимальным.

Значение функционала $b \cdot \delta_F$ в задаче $<b|c>$ будет также обозначаться $\|F\|_b$, а в случае $b=\theta_U$ — еще и $\|F\|_U$. Задачи 1 и 2 допускают «массовую» постановку аналогично задаче $<c, d>$: $<\mu, \Sigma>$ (соответственно, $<S, \Sigma>$) обозначает класс задач об отыскании оптимального потока при фиксированной метрике $\mu$ на $T$ (соответственно, при фиксированной схеме $S=(T, U)$) и произвольных множестве вершин $V$ и функции $c \in \mathscr{E}_+$.

**В. Задача о допустимом мультипотоке минимальной стоимости** $<a|c, d>$: построить мультипоток $F$, удовлетворяющий ограничениям (1.21) и имеющий минимальную суммарную стоимость $a \cdot \zeta_F$.

**Г. Задача о максимальном взвешенном мультипотоке минимальной стоимости** $<a, b|c>$: построить мультипоток, удовлетворяющий ограничению пропускной способности $\zeta_F \leqslant c$ и максимизирующий форму (1.22).

К задаче $<a, b|c>$ тесно примыкает задача $<a, S|c>$ об отыскании мультипотока, имеющего максимальную мощность $\|F\|_U$ (здесь $S=(T, U)$) и при этом минимальную стоимость $a \cdot \zeta_F$. Такая задача сводится к задаче $<a, \lambda\theta_U|c>$ с достаточно большим $\lambda$. Можно поставить массовую задачу $<S, \mathrm{Cost}>$ об отыскании $S$-максимального мультипотока минимальной стоимости при произвольных $V$ и $a, c \in \mathscr{E}_+$. Единственная (за исключением схемы с одним ребром) задача такого рода,

* Вопрос об области значений функций $a$, $b$, $c$, $d$ оставляется в стороне.

решенная к настоящему времени чисто комбинаторными средствами, это $\langle K_n, \mathrm{Cost}\rangle$, где $K_n$ — полный граф произвольного размера $n=|T|$ (см. статью [IX] из настоящего сборника).

Для каждой из перечисленных задач можно предложить соответствующий целочисленный аналог (в общем случае обозначаемый $\langle a, b|c, d\rangle^I$), в котором на мультипоток $F$ накладывается дополнительное требование целочисленности (т. е. величина $f_u(x, y)$, $\forall f_u \in F$, $(x, y) \in (V)^d$ — целая). Эти задачи, как и целочисленные аналоги других известных «непрерывных» задач (не имеющих в общем случае целочисленного решения), существенно более трудны для комбинаторного решения.

Помимо перечисленных задач о мультипотоках существует ряд постановок задач других типов, например, задачи об эквивалентных (по разным параметрам) преобразованиях сетей, о массовом решении задач о допустимости в фиксированной сети при переменных требованиях (см. например, работу Б. А. Папернова из настоящего сборника), задачи о синтезе сетей и т. д. Имеется также определенный круг задач об объектах двойственной (к мультипотокам) природы — метриках на конечных множествах.

## § 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ МУЛЬТИПОТОКОВ

### 1. Теорема существования для задачи $\langle c, d\rangle$

В теории двойственности для мультипотоков фундаментальное место принадлежит общей теореме о существовании в данной сети мультипотока с предписанными значениями мощности отдельных потоков (т. е. о разрешимости задачи $\langle c, d\rangle$). Первоначальный вариант этой теоремы был предложен и доказан K. Onaga—O. Kakusho [40] и M. Iri [36], ввиду чего мы будем называть ее японской теоремой. Эта теорема будет сформулирована в том виде, который придал ей Б. А. Папернов [16]. Этот вид следует признать более удачным для дальнейшего исследования мультипотоков.

*Определение*. Функция $\mu \in \mathscr{E}$ называется *метрикой* на множестве вершин $V$, если для любых трех различных вершин $x, y, z \in V$ выполняется неравенство треугольника

$$\mu[x, y]+\mu[y, z]-\mu[x, z]\geqslant 0. \tag{2.1}$$

Множество всех метрик на $V$ обозначим $\mathscr{M}$. Легко проверить, что из $\mu_1$, $\mu_2 \in \mathscr{M}$ следует $\mu_1+\mu_2 \in \mathscr{M}$, а также $\lambda\mu_1 \in \mathscr{M}$ при $\lambda \geqslant 0$, т. е. $\mathscr{M}$ — выпуклый конус в $\mathscr{E}$ с вершиной в начале координат, очевидно также, что этот конус замкнутый. Из неравенств треугольника для $\mu \in \mathscr{M}$, примененных к двум упорядоченным тройкам вершин $x, y, z$ и $z, x, y$, следует, что $\mu[x, y]\geqslant 0$, это означает, что $\mu \geqslant 0$, т. е. $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{E}_+$ (заметим, что общепринятого для метрик неравенства $\mu > 0$ мы не требуем).

Теорема 2.1 (*японская теорема*). Задача $\langle c, d\rangle$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой метрики $\mu$ на $V$ выполняется неравенство

$$\mu\cdot(c-d)\geqslant 0. \tag{2.2}$$

Идея доказательства будет близка к используемой в [12].

Лемма 2.1 [12]. Задача $<c, d>$ разрешима тогда и только тогда, когда функция $c-d$ является неотрицательной линейной комбинацией ортов и треугольников.

Доказательство. Пусть задача $\langle c, d \rangle$ разрешима и $\Pi=\{\pi^y_{x,z}, \pi_{vw};\ t^y_{xz}\in A\subseteq[V]^3,\ [v, w]\in B\subseteq[V]^d\}$ — треугольный мультипоток, являющийся ее решением. Поскольку $\zeta_\Pi \leqslant c$, то функция $c-\zeta_\Pi$ представима в виде $\Sigma_{[x,y]\in[V]^d}\varepsilon_{xy}I_{[x,y]}$, $\varepsilon_{xy}\geqslant 0$. Из (1.11), (1.13) получаем

$$c-d=\Sigma_{t^y_{xz}\in A}\lambda^y_{xz}\Delta^y_{xz}+\Sigma_{[x,y]\in[V]^d}\varepsilon_{xy}I_{[x,y]}. \tag{2.3}$$

Обратно, пусть $c-d=\Sigma_{t^y_{xz}\in[V]^3}\alpha^y_{xz}\Delta^y_{xz}+\Sigma_{[x,y]\in[V]^d}\beta_{xy}I_{[x,y]}$, $\alpha^y_{x,z}\beta_{xy}\geqslant 0$. Тогда решением задачи, очевидно, является треугольный мультипоток — функция $\pi$, равная $\alpha^y_{xz}$ на $t^y_{xz}\in[V]^3$ и $d[x, y]$ на $[x, y]\in[V]^d$. ■

Следствие 2.1 [12]. Разрешимость задачи $\langle c, d \rangle$ эквивалентна разрешимости любой задачи $\langle c', d' \rangle$, такой, что $c-d=c'-d'$, и, в частности, разрешимости *приведенной* задачи $\langle \tilde{c}, \tilde{d} \rangle$, где $\tilde{c}=(c-d)^+$, $\tilde{d}=(c-d)^-$.

Таким образом, с одной стороны, определяются классы задач, эквивалентных по разрешимости — задач $\langle c, d \rangle$ с одинаковой разностью $c-d$. С другой стороны, любой функции $g\in\mathscr{E}$ можно взаимнооднозначно сопоставить приведенную задачу $\langle g^+, g^- \rangle$, т. е. каждое $g(e)>0$ рассматривается как пропускная способность ребра $e$, а каждое $g(e)<0$ — как требование величины $|g(e)|$ на мощность потока $f_e$. Вопрос о разрешимости в множестве задач $\langle c, d \rangle$ сводится тем самым к вопросу о разрешимости в множестве приведенных задач $\langle g^+, g^- \rangle$, $g\in\mathscr{E}$ (эти задачи будем обозначать просто $g$), более того, имея способ решения приведенной задачи $g$ можно получить решение задачи $\langle c, d \rangle$ с $c-d=g$, построив начальный мультипоток $F^0=\{f^0_u\}$, где $\delta_{f^0_u}=\min\{c(u), d(u)\}\cdot I_u$, $u\in[V]^d$, и уменьшив функции $c$ и $d$ на $\zeta_{F^0}$.

Поскольку при $|V|\geqslant 3$ любой орт $I_{[x,y]}$ представим в виде неотрицательной линейной комбинации треугольников, а именно $I_{[x,y]}=1/2(\Delta^y_{xz}+\Delta^x_{yz})$, то из леммы 2.1 вытекает также

Следствие 2.2(12). Множество разрешимых приведенных задач образует в $\mathscr{E}$ выпуклый замкнутый конус, минимальной системой образующих* которого является совокупность всевозможных треугольников $\Delta^y_{xz}$, рассматриваемых с точностью до подобия. (Неразложимость «простейшей» разрешимой задачи — треугольника $\Delta^y_{xz}$, следует из соображений симметрии и из несовпадения конуса со всем пространством $\mathscr{E}$ или его полупространством — последнее вытекает, например, из неразрешимости задачи $g=I_{xy}-I_{yz}$ и задачи $-g$). Конус разрешимых приведенных задач будет обозначаться через $\mathscr{F}$.

Согласно (2.1) функция $\mu$ является метрикой тогда и только тогда, когда $\mu\cdot\Delta^y_{xz}\geqslant 0$ для любого треугольника $\Delta^y_{xz}$. Поскольку любая задача из $\mathscr{F}$ представима в виде неотрицательной линейной комбинации треугольников $\Delta^y_{xz}$, то

$$\mathscr{M}=\{\mu\in\mathscr{E}:\mu\cdot g\geqslant 0,\ \forall g\in\mathscr{F}\},$$

т. е. $\mathscr{M}$ есть двойственный конус $\mathscr{F}^*$ к конусу разрешимых задач $\mathscr{F}$.

* Под системой образующих данного множества $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$ понимается такая конечная совокупность векторов $\{a_i\in\mathscr{E}';\ i\in I\}$, что любой вектор $b\in\mathscr{E}'$ представим в виде $\Sigma_{i\in T}\alpha_i a_i$, $\alpha_i\geqslant 0$.