

А. В. Карзанов, П. А. Певзнер

ОПИСАНИЕ КЛАССА НЕРАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О МУЛЬТИПОТОКАХ МАКСИМАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ

В статье устанавливается неразрезность для некоторого класса мультипоточковых задач на $\text{max-}\Sigma$ в неориентированных сетях. Неразрезные массовые задачи на $\text{max-}\Sigma$ характеризуются тем, что препятствия, ограничивающие мощности мультипоточков, в общем случае не являются линейными комбинациями метрик-разрезов. По-видимому, для таких задач будут недостаточными применяемые до сих пор методы решения, основанные только на преобразованиях мультипоточков вдоль определенных увеличивающих путей — альтернатив насыщенным разрезам. Рассматриваемый класс одержит все те массовые задачи на $\text{max-}\Sigma$, которые не входят в класс разрезных задач, решаемых при помощи алгоритма работы [1], таким образом на вопрос о полном описании класса разрезных задач на $\text{max-}\Sigma$ получен окончательный ответ.

Приведем необходимые нам определения и утверждения, содержащиеся в работе [1]. Поточковой сетью называется объект $(V, T; c)$, состоящий из множества вершин V , множества полюсов $T \subseteq V$ и неотрицательной действительно-значной функции пропускной способности c , заданной на множестве $[V]^d$ неупорядоченных пар различных вершин V .

Сеть $N = (V, T; c)$ может быть задана также в виде пары (G, c) , где $G = (V, E)$ — граф с множеством ребер $E = \{[x, y] \in [V]^d : c[x, y] > 0\}$, а c рассматривается как функция на E . Мультипоточком в сети $N = (V, T; c)$, соответствующим потоковой схеме $S = (T, U)$, называется семейство двухполюсных потоков*; $F = \{f_{st}; [s, t] \in U\}$, такое, что:

$$\zeta_F[x, y] \equiv \sum_{[s, t] \in U} (f_{st}(x, y) + f_{st}(y, x)) \leq c[x, y], \quad \forall [x, y] \in [V]^d.$$

Задача на $\text{max-}\Sigma$ для сети $N(V, T, c)$ потоковой схемой $S(T, U)$, обозначаемая в виде $\langle S | c \rangle$, состоит в отыскании в N мультипоточка $F = \{f_{st}; [s, t] \in U$, максимальной мощности $\|F\| \equiv \sum_{[s, t] \in U} \|f_{st}\|$. Совокупность задач на $\text{max-}\Sigma$ со всевозможными сетями $N(V, T; c]$ (т. е.

* Определение потока см. в [1].

при всевозможных V и c) и с фиксированной схемой S , образует массовую задачу $\langle S, \Sigma \rangle$.

Для задач на $\text{max-}\Sigma$ установлена следующая теорема двойственности (см. [10], [I]).

Теорема 1. Мультипоток $F = \{f_{st}; [s, t] \in U\}$ является решением задачи на $\text{max-}\Sigma$ в сети $N(V, T, c)$ со схемой $S(T, U)$ тогда и только тогда, когда найдется метрика μ^* на V , для которой $\mu^*[s, t] = 1$, $\forall [s, t] \in U^*$ и

$$\|F\| = c \cdot \mu^* = \min(c \cdot \mu), \quad (1)$$

где μ протекает множество S , 1-метрика на V (здесь $a \cdot b = \sum_{[x, y] \in [V]^d} a[x, y] \times b[x, y]$).

Мультипоток F в сети N и S , 1-метрика μ оптимальны (т. е. удовлетворяют равенству (1)) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

A1. Если $\mu[x, y] > 0$ для некоторого $[x, y] \in [V]^d$, то $\zeta_F[x, y] = c[x, y]$.

A2. Метрика μ и мультипоток F согласованы. ■

Под согласованностью F и μ понимается выполнение соотношения $(\zeta_F - \delta_F)\mu = 0$, где δ_F — функция мощности: $\delta_F[x, y] = \|f_{xy}\|$ при $[x, y] \in U$ и $\delta_F[x, y] = 0$ при $[x, y] \in [V]^d \setminus U$ (это эквивалентно тому, что для любой потоковой нити ϕ_L потока F ее носитель — цепь L — геодезическая метрики μ^{**}).

Потоковая схема $S(T, U)$ (а также задача $\langle S, \Sigma \rangle$) называется *разрезной*, если для любой сети $N(V, T; c)$ существует (зависящая от N) S , 1-метрика μ , на которой достигается минимум правой части (1), являющаяся неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов:

$$\mu = \sum_{X \in \mathcal{X}} \alpha(X) \rho_X, \text{ где } \alpha(X) \geq 0,$$

$$\rho_X[v, w] = \begin{cases} 1, & \text{если } v \in X, w \in V \setminus X \text{ или } v \in V \setminus X, w \in X. \\ 0, & \text{если } v, w \in X \text{ или } v, w \in V \setminus X \end{cases}$$

В [10], [I] была сформулирована теорема (доказательство достаточности которой дано там же), дающая полное описание разрезных потоковых схем.

О п р е д е л е н и е. Неориентированный граф H называется 3-незацепляющим (по антикликам), если любая его вершина принадлежит не более чем двум антиклинам H (в противном случае граф H называется 3-зацепленным).

Основная теорема [10], [I]. Потоковая схема S , не содержащая изолированных вершин, является разрезной тогда и только тогда, когда граф S — 3-незацепляющийся.

В настоящей работе будет проведено доказательство необходимости условия основной теоремы, а именно — доказана

Теорема А. Всякая 3-зацепленная схема без изолированных вершин неразрезна.

§ 1. РЕДУКЦИЯ ПОТОКОВЫХ СХЕМ

1.1. Сведение рассматриваемой проблемы к анализу конечного числа 3-зацепленных схем основано на следующей теореме.

Теорема 2. Любой порожденный подграф разрезной схемы $S(T, U)$ разрезен.

* Такие метрики [I] названы S , 1-метриками.

** Определение потоковой нити, а также геодезической см. в [I].

Доказательство. Через $\langle X \rangle_G$ мы будем обозначать подграф графа $G(V, E)$ порожденный подмножеством вершин $X \subseteq V$. Пусть $T_1 \subseteq T$ и $N(V, T_1; c)$ — произвольная сеть с потоковой схемой $\langle T_1 \rangle_S$. Докажем, что для этой сети найдется разрезная метрика (т. е. метрика, являющаяся выпуклой комбинацией разрезов), доставляющая минимум в правой части (1). Рассмотрим сеть $N^*(V \cup (T \setminus T_1), T; c)$, получающуюся из N добавлением множества изолированных вершин $T \setminus T_1$, с потоковой схемой $S(T, U)$. Так как схема $S(T, U)$ разрезна, найдется разрезная метрика на множестве $V \cup (T \setminus T_1)$, доставляющая минимум в правой части (1). Очевидно, что ее ограничение на V — разрезная метрика, минимизирующая правую часть (1) и для сети $N(V, T_1; c)$ с потоковой схемой $\langle T_1 \rangle_S$. Следовательно схема $\langle T_1 \rangle_S$ разрезна.

З а м е ч а н и е. Как отмечено Б. А. Паперновым [16] для задач на допустимость, свойство разрезности потоковых схем наследственно по ребрам. Для рассматриваемой нами задачи на тах- Σ , как следует из теоремы 2, свойство разрезности наследственно лишь по вершинам.

1.2. Граф называется 3-графом, если он содержит 3 попарно пересекающиеся антиклики и не содержит изолированных вершин. 3-граф называется минимальным, если все его собственные порожденные подграфы не являются 3-графами. Мы будем писать $H \cong G$, если H и G изоморфны и $H < G$ если H изоморфен некоторому порожденному подграфу G . Определим две пары 3-графов B, \bar{B} и R, \tilde{R} (рис. 1).

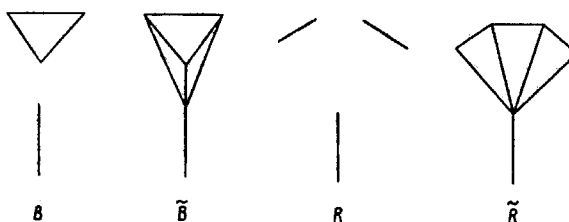


Рис. 1

Теорема о редукции. Всякий минимальный 3-граф G либо содержит B и содержится в \bar{B} либо содержит R и содержится в \tilde{R} .

Доказательство. А. Для любых двух антиклик X и Y графа $G(V, E)$ и любой вершины $x \in X \setminus Y$ найдется вершина $y \in Y \setminus X$ такая, что $[x, y] \in E$.

Б. Пусть A_1, A_2 и A_3 — антиклики минимального 3-графа $G(V, E)$, пересекающиеся в одной вершине. Обозначим

$$\bigcap_{i=1}^3 A_i \stackrel{\text{def}}{=} A,$$

$$A_i \setminus (A_j \cup A_l) \stackrel{\text{def}}{=} A^i, \quad i, j, l \text{ различны,}$$

$$(A_i \cap A_j) \setminus A \stackrel{\text{def}}{=} A^{ij}, \quad i \text{ и } j \text{ различны.}$$

Для антиклик A_1, A_2 и A_3 выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) по крайней мере два из множеств A^{12}, A^{13}, A^{23} непусты (см. В);
- 2) по крайней мере два из множеств A^{12}, A^{13}, A^{23} пусты (см. Г).

* Антикликой графа называется любое максимальное по включению множество попарно не смежных вершин в нем.

В. Пусть множества A^{12} и A^{13} непусты. Выберем вершины $s \in A$, $x \in A^{12}$, $z \in A^{13}$. Так как G не содержит изолированных вершин, то существует ребро $[s, t] \in E$. Из А следует, что в G найдутся ребра $[x, y]$ и $[z, v]$ такие, что $y \in A^3$, $v \in A^2$ (рис. 2а). Легко увидеть, что $\langle \{x, y, z, v, s, t\} \rangle_G$ содержит R , содержится в R , и, следовательно, является 3-графом. Поскольку граф G минимален, то $\{x, y, z, v, s, t\} = V$.

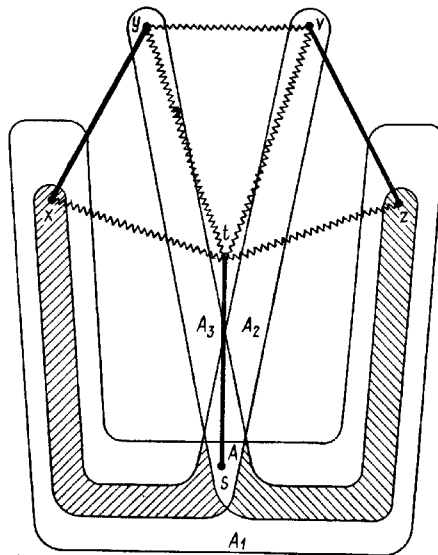


Рис. 2а

Г. Пусть множества A^{12} и A^{13} пусты. Выберем $s \in A$ и $[s, t] \in E$. Если $\langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle_G$ содержит треугольник $\langle \{x, y, z\} \rangle_G$, то $\langle \{x, y, z, s, t\} \rangle_G$ содержит B , содержится в \bar{B} и, следовательно, является 3-графом (рис. 2б). Так как граф G минимален, то $\{x, y, z, s, t\} = V$.

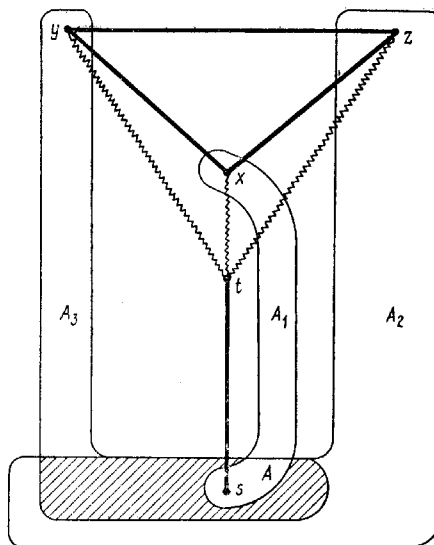


Рис. 2б

Рассмотрим теперь случай, когда $\langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle_G$ не содержит треугольников. Известно, что A^{12} и A^{13} пусты, тогда по доказательству A найдутся вершины x, y, v, z (рис. 2в), такие, что $A \in A_2 \setminus A_3$, $[x, y] \in E$, $y \in A_3 \setminus A_1$, $[y, v] \in E$, $v \in A_1 \setminus A_3$, $[v, z] \in E$, $z \in A_2 \setminus A_1$.

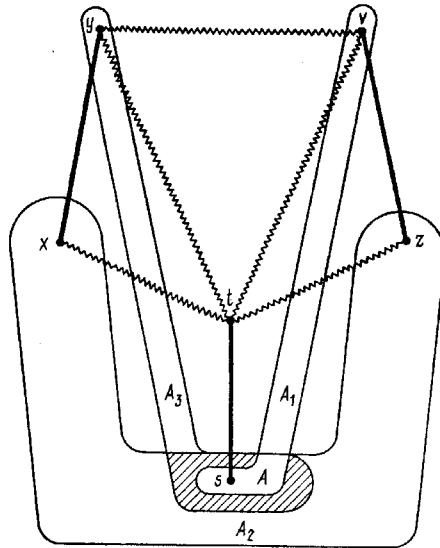


Рис. 2в

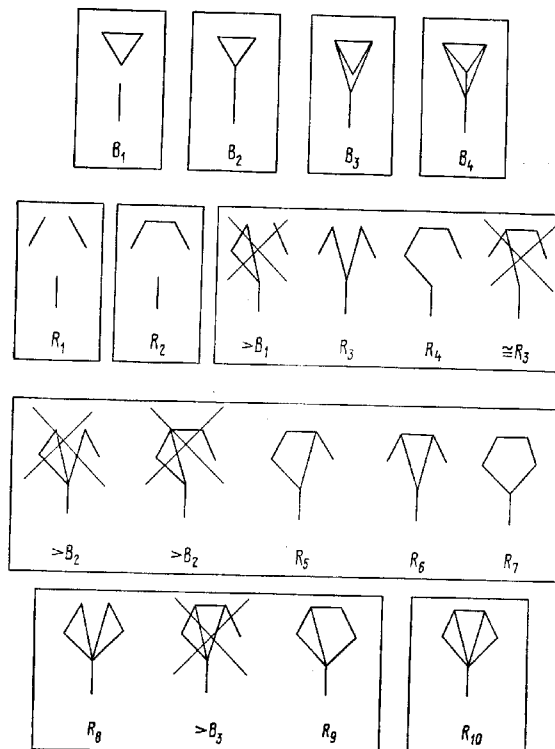


Рис. 3

В. Пусть множества A^{12} и A^{13} непусты. Выберем вершины $s \in A$, $x \in A^{12}$, $z \in A^{13}$. Так как G не содержит изолированных вершин, то существует ребро $[s, t] \in E$. Из A следует, что в G найдутся ребра $[x, y]$ и $[z, v]$ такие, что $y \in A^3$, $v \in A^2$ (рис. 2а). Легко увидеть, что $\langle \{x, y, z, v, s, t\} \rangle_G$ содержит R , содержится в R , и, следовательно, является 3-графом. Поскольку граф G минимален, то $\{x, y, z, v, s, t\} = V$.

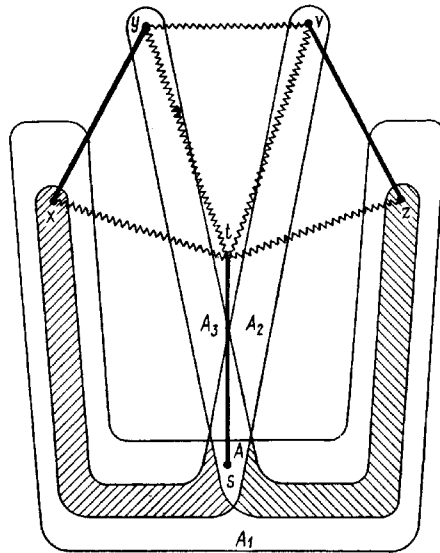


Рис. 2а

Г. Пусть множества A^{12} и A^{13} пусты. Выберем $s \in A$ и $[s, t] \in E$. Если $\langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle_G$ содержит треугольник $\langle \{x, y, z\} \rangle_G$, то $\langle \{x, y, z, s, t\} \rangle_G$ содержит B , содержится в \bar{B} и, следовательно, является 3-графом (рис. 2б). Так как граф G минимален, то $\{x, y, z, s, t\} = V$.

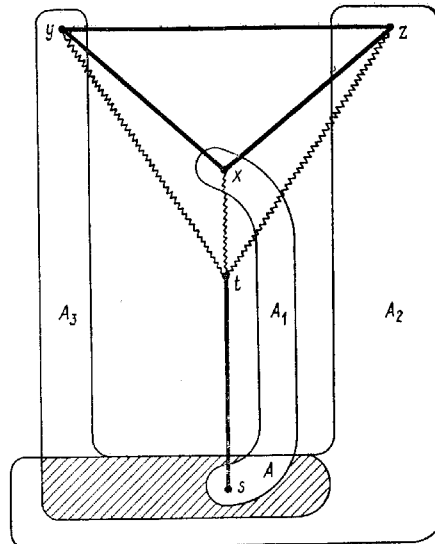


Рис. 2б

Рассмотрим теперь случай, когда $\langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle_G$ не содержит треугольников. Известно, что A^{12} и A^{13} пусты, тогда по доказательству A найдутся вершины x, y, v, z (рис. 2в), такие, что $A \in A_2 \setminus A_3$, $[x, y] \in E$, $y \in A_3 \setminus A_1$, $[y, v] \in E$, $v \in A_1 \setminus A_3$, $[v, z] \in E$, $z \in A_2 \setminus A_1$.

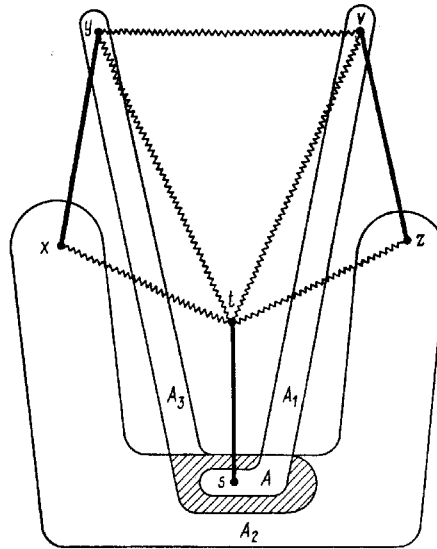


Рис. 2в

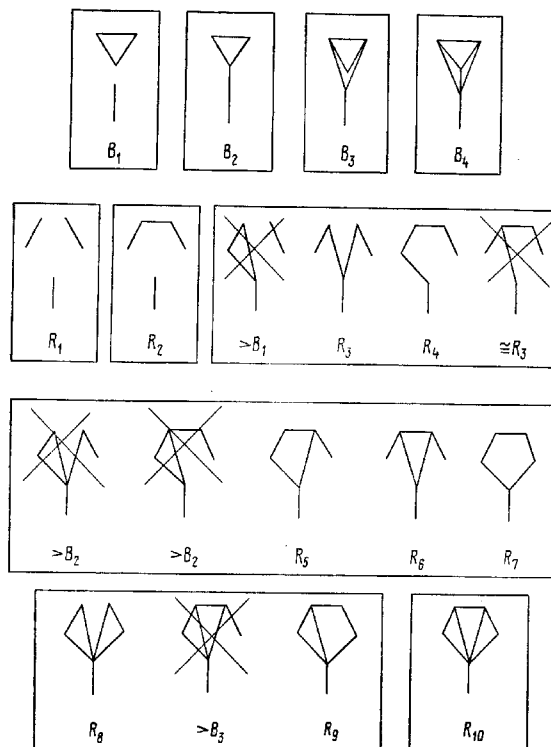


Рис. 3

Поскольку $x, z \in A_2$, то $[x, z] \notin E$, а так как $\langle A_1 \cup A_2 \cup A_3 \rangle_G$ не содержит треугольников, то $[x, v] \notin E$ и $[y, z] \notin E$. Теперь видно, что $\langle \{x, y, z, v, s, t\} \rangle_G$ содержит R , содержится в \bar{R} и, следовательно, является 3-графом. Граф G минимален, поэтому $\{x, y, z, v, s, t\} = V$. ■

1.3. Любая потоковая схема, содержащая B и содержащаяся в \bar{B} или содержащая R и содержащаяся в \bar{R} , изоморфна одному из графов, представленных на рис. 3. (изоморфные и неминимальные 3-графы на этом рисунке перечеркнуты). Из теоремы 2 и теоремы о редукции следует, что для доказательства теоремы А достаточно провести доказательство неразрезности каждой из 14 потоковых схем: $B_i, i = \overline{1, 4}$ и $R_i, i = \overline{1, 10}$.

§ 2. МЕТРИКИ

2.1. Напомним некоторые определения из [1]. Метрики μ_1 и μ_2 на множестве V подобны, если существует такое действительное число a , что $\mu_1[x, y] = a\mu_2[x, y]$ для любого $[x, y] \in [V]^d$. Множество метрик, подобных μ , обозначается через $\{\mu\}$, а ограничение μ на множество $W \subseteq V - \mu|_W$. Множество S,1-метрик на V обозначается $\mathfrak{M}(S)$.

Пусть $L[x_1, x_k] = (x_1, \dots, x_k)$ — простая цепь на множестве V , состоящая более чем из двух вершин; L называется геодезической

метрики μ , если ее длина, т. е. $\sum_{i=1}^{k-1} \mu[x_i, x_{i+1}]$ равна $\mu[x_1, x_k]$.

Через $\mathcal{F}(\mu)$ обозначается семейство геодезических метрики μ .

Отрезок цепи $L[x_1, x_k] = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k)$ от x_i до x_j обозначается $L[x_i, x_j]$. Цепь L содержит цепь M , если L содержит вершины x и y , такие, что $L[x, y] = M$. Обозначим $\overline{\mathcal{F}}$ — семейство максимальных (по включению) цепей системы \mathcal{F} , \mathcal{F}^* — семейство цепей, содержащихся в цепях системы \mathcal{F} и $\mathcal{F}_{[x, y]}^*$ — семейство цепей системы \mathcal{F}^* , проходящих через вершины x и y .

Мы будем говорить, что метрика μ удовлетворяет системе цепей \mathcal{F} , если $\mathcal{F}(\mu) \supseteq \mathcal{F}$. Множество метрик, удовлетворяющих системе цепей \mathcal{F} , обозначается $M(\mathcal{F})$.

2.2. Пусть \mathcal{M} — конус метрик в евклидовом пространстве действительно-значных функций на $[V]^d$ (см. [1]). Образующие конуса \mathcal{M} называются простыми метриками (для всякой простой метрики μ , из $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ следует, что μ_1 и μ_2 подобны μ).

Нетрудно установить справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. Метрика μ является простой тогда и только тогда, когда $M(\mathcal{F}(\mu)) = \{\mu\}$. ■

Лемма 2. Если \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 системы цепей на V и $\mathcal{F}_1^* \supseteq \mathcal{F}_2^*$, то $M(\mathcal{F}_1) \subseteq M(\mathcal{F}_2)$. ■

Из лемм 1 и 2 следует

Лемма 3. Если μ — простая метрика на V и $\mathcal{F}(\mu_1) \supseteq \mathcal{F}(\mu)$ то метрика μ_1 подобна μ . ■

2.3. *Графовой метрикой* для связного графа $G(V, E)$ называется метрика μ_G на множестве V , определенная условием: $\mu_G[x, y]$ равно длине кратчайшей цепи между x и y в графе G .

Порожденный подграф $H = \langle W \rangle_G$ графа $G(V, E)$ называется метрическим, если $\mu_G|_W = \mu_H$, где $\mu_G|_W$ — ограничение μ_G на $[W]^d$.

Приведем достаточное условие простоты графовой метрики. Ребра e и u в графе G называются *непосредственно зацепленными*, если существует метрический подграф $\langle W \rangle_G$, являющийся четным циклом, в котором e и u — противоположные ребра. Ребра e и u называются *зацепленными*, если существует последовательность $\{e, \dots, u\}$, любые два соседних члена которой непосредственно зацеплены.

Граф *связан по отношению зацепления*, если любые два его ребра зацеплены. Нетрудно убедиться, что графы $K_{3,2}$, $K_{3,3} \setminus \{e\}$ и K_F , представленные на рис. 4, связаны по отношению зацепления.

Теорема 3 [12]. Если граф G связан по отношению зацепления, то μ_G — простая метрика.

Таким образом, графы, представленные на рис. 4, порождают простые метрики.

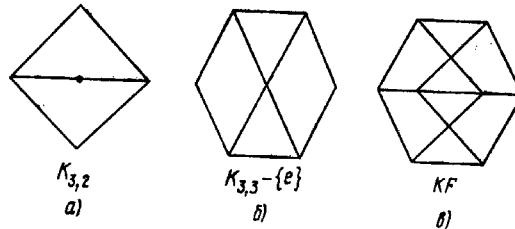


Рис. 4

2.4. Вершины x и y называются *антиподами* системы геодезических \mathcal{F} на V , если всякая геодезическая системы \mathcal{F} с концами в x и y принадлежит системе $\overline{\mathcal{F}}$. Пары антиподов системы \mathcal{F} образуют подмножество множества $[V]^d$, которое порождает граф $\text{Ant}(\mathcal{F})$ на множестве вершин V . Заметим, что графы $\text{Ant}(\mathcal{F}(\mu_{K_{3,2}}))$, $\text{Ant}(\mathcal{F}(\mu_{K_{3,3} \setminus \{e\}}))$ и $\text{Ant}(\mathcal{F}(\mu_{K_F}))$ изоморфны графам B , R и R соответственно.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из леммы 3.

Лемма 4. Пусть μ — простая метрика и \mathcal{F} — система геодезических на множестве V . Тогда если для любой пары $[x, y] \in \text{Ant}(\mathcal{F}(\mu))$ выполняется $(\mathcal{F}^*)_{[x,y]} \supseteq \mathcal{F}(\mu)_{[x,y]}$, то $M(\mathcal{F}) \subseteq \{\mu\}$. ■

2.5. Пусть \mathcal{F} — система цепей на множестве V и $w \in W \subset V$. Мы будем писать $L \subset W$, если множество вершин цепи L содержится в W . Система цепей $\mathcal{F}|_W = \{L : L \in \mathcal{F}^* \text{ и } L \subset W\}$ называется ограничением системы цепей \mathcal{F} на множество W .

Определим отображения $pr: V \rightarrow (V \setminus W) \cup \{w\}$ и $pr^{-1}: (V \setminus W) \cup \{w\} \rightarrow V$ по правилам:

$$pr(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in V \setminus W \\ w, & \text{если } x \in W, \end{cases} \quad pr^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in V \setminus W \\ w, & \text{если } x = w. \end{cases}$$

Сжатием цепи $L = (x_1, \dots, x_k)$ на V по множеству W называется цепь $(pr(x_1), \dots, pr(x_k))$ на множестве $(V \setminus W) \cup \{w\}$. Сжатием $\mathcal{F}|_W$ системы цепей \mathcal{F} по множеству W называется система сжатий цепей из \mathcal{F} по W .

Метрика μ называется *W-тривиальной*, если она равна нулю на множестве $[W]^d$.

Для *W-тривиальной* метрики μ определим сжатие $\mu|_W$ по множеству W по правилу: $(\mu|_W)[x, y] = \mu[pr^{-1}(x), pr^{-1}(y)]$ ($\mu|_W$ — метрика на

$(V \setminus W) \cup \{w\}$). Сжатие графа G по множеству вершин W обозначается $G|_W$.

Следующие два утверждения вытекают непосредственно из определений.

Лемма 5. Пусть μ — W -тривиальная метрика на множестве V . Тогда $\mathcal{F}(\mu|_W) = \mathcal{F}(\mu)|_W$. ■

Лемма 6. Пусть μ — метрика на множестве V и $W \subseteq V$. Если метрика $\mu|_W$ неразрезна (т. е. не представима в виде выпуклой комбинации метрик-разрезов), то и μ неразрезна.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А

3.1. Изложим идею доказательства. Для того чтобы доказать неразрезность потоковой схемы $S(T, U)$, мы построим некоторую сеть $N(V, T; c)$ и максимальный мультипоток $F = \{f_u; u \in U\}$ в этой сети. Система нитей потока F определяет некоторую систему геодезических \mathcal{F} на множестве V . По условию А2 все оптимальные метрики для сети N с потоковой схемой S являются $S, 1$ -метриками и принадлежат множеству $M(\mathcal{F})$. Для доказательства неразрезности S достаточно показать, что среди $S, 1$ -метрик множества $M(\mathcal{F})$ нет выпуклых комбинаций разрезов.

Пусть μ — $S, 1$ -метрика множества $M(\mathcal{F})$. В множестве V выделяется подмножество W , такое, что для графа $H = \langle W \rangle_G$ метрика μ_H проста. Далее показывается, что для μ_H и системы геодезических \mathcal{F}_W выполняются условия леммы 4 и, следовательно, $\mu|_W = a\mu_H$, для некоторого $a > 0$. Если $a = 0$, то по лемме 5 $\mathcal{F}(\mu|_W) = \mathcal{F}(\mu)|_W \cong \mathcal{F}|_W$ и, следовательно, $\mu|_W$ — $S, 1$ -метрика из множества $M(\mathcal{F}|_W)$. Далее, путем установления несовместности некоторой системы линейных уравнений показывается, что в $M(\mathcal{F}|_W)$ не содержится ни одной $S, 1$ -метрики, откуда вытекает, что $a \neq 0$. Отсюда следует, что $\mu|_W$ — неразрезная метрика, а из неразрезности $\mu|_W$ и леммы 6 следует неразрезность μ .

3.2. Приведем некоторые определения. Суммой сетей $N^1 = (V, T; c^1)$ и $N^2 = (V, T; c^2)$ называется сеть $N^1 + N^2 = (V, T; c^1 + c^2)$. Суммой мультипоток $F^1 = \{f_u^1; u \in U\}$ и $F^2 = \{f_u^2; u \in U\}$ в сетях N^1 и N^2 , соответственно, с одной и той же потоковой схемой $S(T, U)$ называется мультипоток $F^1 + F^2 = \{f_u; u \in U\}$ в сети $N^1 + N^2$, определенный условиями:

$$\forall u \in U, \forall x, y \in V: f_u(x, y) = f_u^1(x, y) + f_u^2(x, y).$$

Мультипоток мощности 1, состоящий из единственной нити φ_L с носителем L , называется элементарным мультипоток.

Цепь $L[x, y]$ называется допустимой относительно потоковой схемы $S(T, U)$ (или S -цепью), если $[x, y] \in U$. Пусть \mathcal{F} — некоторое множество S -цепей в сети N . Через $F(\mathcal{F})$ обозначим мультипоток $\sum \varphi_L$, а через $N(\mathcal{F})$ — сеть мультипотока $F(\mathcal{F})$, т. е. сеть $(V, T, \xi_{F(\mathcal{F})})$. Множество всех кратчайших S -цепей графа $G(V, E)$ обозначим \mathcal{F}_{G^S} .

3.3. Неразрезность графов B и R . Доказательство неразрезности этих графов проводится особенно просто, без использования метода, изложенного в 3.1.

1. Рассмотрим граф $G \cong K_{3,2}$ и потоковую схему $S \cong B$ (рис. 5а). Мультипоток $F(\mathcal{F}_{G^S})$ максимален в сети $N(\mathcal{F}_{G^S})$, так как для него и $S, 1$ -метрики $\frac{1}{2} \mu_G$ выполнены условия А1 и А2 (для проверки выполне-

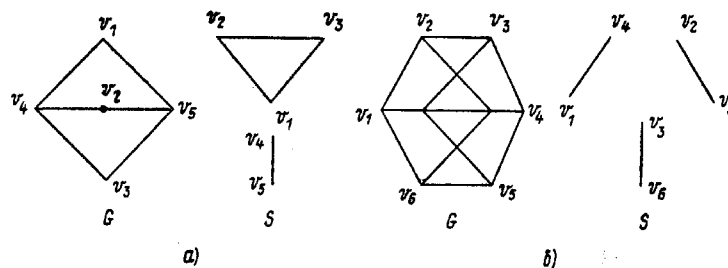


Рис. 5

ния A2 достаточно заметить, что все цепи семейства \mathcal{F}_G^S имеют два ребра).

Пусть μ — оптимальная метрика для сети N с потоковой схемой S .

Так как $\text{Ant}(\mathcal{F}(\mu_G)) = S$, то для простой метрики μ_G и системы геодезических \mathcal{F}_G^S выполняются условия леммы 4, и, следовательно, $M(\mathcal{F}_G^S) \subseteq \{\mu_G\}$.

По A2 выполняется $\mathcal{F}(\mu) \supseteq \mathcal{F}_G^S$, и по лемме 2 — $M(\mathcal{F}(\mu)) \subseteq M(\mathcal{F}_G^S) = \{\mu_G\}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что S , 1-метрика μ подобна μ_G и проста.

2. Рассмотрим граф $G \cong KF$ и потоковую схему $S \cong R$ (рис. 5б). Мультипоток $F(\mathcal{F}_G^S)$ в сети $N(\mathcal{F}_G^S)$ максимален, так как для него и S , 1-метрики $\frac{1}{3}\mu_G$ выполнены условия A1 и A2 (для проверки выполнения A2 достаточно заметить, что все цепи семейства \mathcal{F}_G^S имеют 3 ребра). Применяя лемму 4 к простой метрике μ_G и системе геодезических \mathcal{F}_G^S , мы получим, что всякая оптимальная метрика μ для сети $N(\mathcal{F}_G^S)$ с потоковой схемой S подобна μ_G и, следовательно, проста.

3.4. Неразрезность графов B_2, B_3, B_4 . Доказательство проводится в соответствии с 3.1. Рассмотрим граф $G(V, E)$ и потоковую схему $S(T, U) \cong B_2$ (рис. 6а, 6б). Обозначим $W = \{v_1, \dots, v_5\}$ и заметим, что

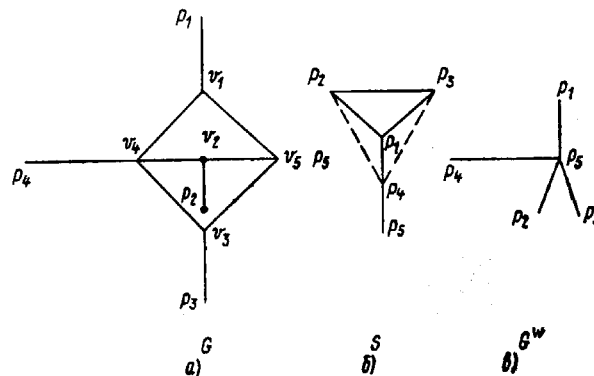


Рис. 6

$H = \langle W \rangle_G \cong K_{3,2}$. Мультипоток $F(\mathcal{F}_G^S)$ максимален в сети $N(\mathcal{F}_G^S)$ с потоковой схемой S , так как для него и S , 1-метрики $\frac{1}{4}\mu_G$ выполнены условия A1 и A2 (для проверки выполнения A2 достаточно заметить, что все цепи системы \mathcal{F}_G^S имеют 4 ребра). Так как для простой мет-

рики μ_H и системы геодезических $\mathcal{F}_G^S|_W$ выполняются условия леммы 4, то $M(\mathcal{F}_G^S|_W) \subseteq \{\mu_H\}$.

Пусть μ — произвольная оптимальная метрика для сети N с потоковой схемой S . По А2 $\mathcal{F}(\mu) \supseteq \mathcal{F}_G^S|_W$, и, следовательно, $\mathcal{F}(\mu|_W) \supseteq \mathcal{F}_G^S|_W$.

Используя теперь лемму 2, получаем $M(\mathcal{F}(\mu|_W)) \subseteq M(\mathcal{F}_G^S|_W) \subseteq \{\mu_H\}$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $\mu|_W = a\mu_H$. Если $a=0$, то по лемме 5

$$\mathcal{F}(\mu|_W) = \mathcal{F}(\mu)|_W \supseteq \mathcal{F}_G^S|_W.$$

Геодезические системы $\mathcal{F}_G^S|_W$ приводят к следующим соотношениям для S , 1-метрики μ (рис. 6в):

$$\begin{cases} 1 = \mu[p_1, p_2] = \mu[p_1, p_5] + \mu[p_5, p_2] \\ 1 = \mu[p_1, p_3] = \mu[p_1, p_5] + \mu[p_5, p_3] \\ 1 = \mu[p_2, p_3] = \mu[p_2, p_5] + \mu[p_5, p_3] \\ 1 = \mu[p_1, p_4] = \mu[p_1, p_5] + \mu[p_5, p_4] \\ 1 = \mu[p_4, p_5]. \end{cases}$$

Несовместность этой системы уравнений показывает, что $a \neq 0$, следовательно, метрика $\mu|_W$ не равна нулю и проста. Отсюда и из леммы 6 следует, что метрика μ неразрезна и B_2 — неразрезная потоковая схема.

Так как метрика $\frac{1}{4}\mu_G$ устанавливает расстояние 1 на ребрах $[p_2, p_4]$ и $[p_3, p_4]$ (см. рис. 6б), то мультипоток $F(\mathcal{F}_G^{B_2})$ максимален в сети $N(\mathcal{F}_G^{B_2})$ также и для потоковых схем B_3 и B_4 . Так как $\mathfrak{M}(B_2) \supseteq \mathfrak{M}(B_3)$ и $\mathfrak{M}(B_2) \supseteq \mathfrak{M}(B_4)$, то потоковые схемы B_3 и B_4 также неразрезны.

3.5. Неразрезность графов $R_2, R_3, R_5, R_6, R_8, R_9, R_{10}$. Рассмотрим граф $G(V, E)$ и потоковую схему $S(T, U) \cong B_2$ (рис. 7а и 7б). Обозначим $W = \{v_1, \dots, v_6\}$ и заметим, что $H = \langle W \rangle_G \cong K_{3,3} \setminus \{e\}$.

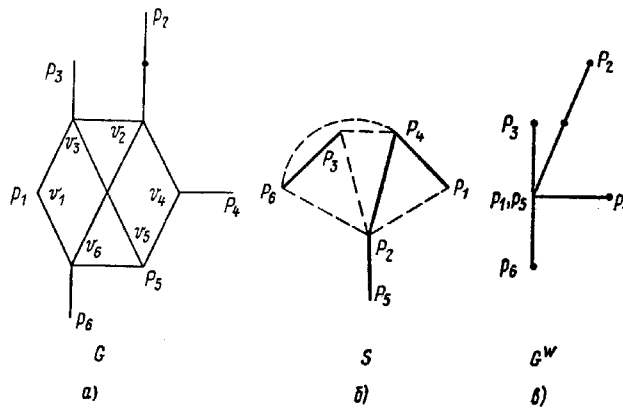


Рис. 7

Мультипоток $F(\mathcal{F}_G^S)$ максимален в сети $N(\mathcal{F}_G^S)$ с потоковой схемой S , так как для него и для S , 1-метрики $\frac{1}{4}\mu_G$ выполняются условия А1 и А2 (для проверки выполнения А2 достаточно заметить, что все цепи системы \mathcal{F}_G^S имеют 4 ребра).

Пусть μ — произвольная оптимальная метрика для сети $N(\mathcal{F}_G^S)$ с потоковой схемой S . Из лемм 1, 2, 4 и условия A2 следует, что $\mu|_W = a\mu_H$ (доказательство проводится так же, как в 3.4). Если $a=0$, то по лемме 5

$$\mathcal{F}(\mu|_W) = \mathcal{F}(\mu)|_W \supseteq \mathcal{F}_G^S|_W.$$

Геодезические системы $\mathcal{F}_G^S|_W$ приводят к следующим соотношениям для S , 1-метрики μ (рис. 7в):

$$\begin{cases} 1 = \mu[p_6, p_3] = \mu[p_6, p_1] + \mu[p_1, p_3] \\ 1 = \mu[p_2, p_4] = \mu[p_2, p_1] + \mu[p_1, p_4] \\ 1 = \mu[p_1, p_4] \\ 1 = \mu[p_2, p_5] = \mu[p_2, p_1]. \end{cases}$$

Несовместность этой системы уравнений показывает, что $a \neq 0$ и, следовательно, метрика $\mu|_W$ проста. Отсюда и из леммы 6 следует, что метрика μ неразрезна и R_2 — неразрезная потоковая схема.

Заметим, что метрика $\frac{1}{4}\mu_G$ устанавливает расстояние 1 не только на ребрах потоковой схемы $S(T, U)$, но и на всех ребрах графа $F(T, U_1)$ (ребра множества $U_1 \setminus U$ изображены на рис. 7б пунктиром). Отсюда следует, что любой граф, содержащий S и содержащийся в F , неразрезен. Все графы, перечисленные в заголовке данного пункта, содержат S , содержатся в F и поэтому неразрезны.

3.6. Неразрезность графов R_4 и R_7 . Рассмотрим граф $G(V, E)$ и потоковую схему $S(P, U) \cong R_4$ (рис. 8). Мультипоток $F(\mathcal{F}_G^S)$ максима-

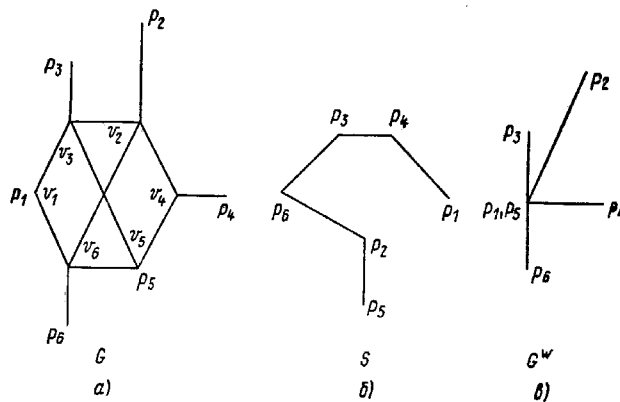


Рис. 8

лен в сети $N(\mathcal{F}_G^S)$ с потоковой схемой S , так как для него и S , 1-метрики $\frac{1}{4}\mu_G$ выполнены условия A1 и A2. В дальнейшем доказательство неразрезности R_4 проводится в соответствии с изложенным в 3.1. Так как метрика $\frac{1}{4}\mu_G$ устанавливает расстояние 1 на ребре $[p_1, p_2]$, то граф R_7 также неразрезен.

Этим завершается доказательство теоремы А.

З а м е ч а н и е. Для построения эффективного алгоритма распознавания разрезности можно воспользоваться алгоритмом Брона и Кэрбоса нахождения всех антиклик графа. Так как число антиклик в 3-неза-

цепляющемся графе $G(V, E)$ не превышает $|V|$, то для обеспечения эффективности алгоритма распознавания разрезности достаточно останавливать алгоритм Брона и Кэрбоша в тех случаях, когда он построит более чем $|V|$ антиклик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. Поточковые алгоритмы. М., «Наука», 1975.
2. Гришукин В. П. Многогранники, связанные со структурами, и минимаксные комбинаторные задачи. — В сб.: Графы, гиперграфы и дискретные оптимизационные задачи. Киев, «Знание», 1977, с. 14—16.
3. Диниц Е. А. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой. — Доклады АН СССР, 1970, т. 194, № 4.
4. Диниц Е. А., Зайцев М. А., Карзанов А. В. Алгоритм выделения блоков в графе. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1974, т. 14, № 6, с. 1309—1316.
5. Диниц Е. А., Карзанов А. В., Ломоносов М. В. О структуре системы минимальных реберных разрезов графа. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 290—306.
6. Карзанов А. В. Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. — В сб.: Труды 3-ей Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам в г. Дрогобыч. М., 1970.
7. Карзанов А. В. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков. — Доклады АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 49—53.
8. Карзанов А. В. Экономные реализации алгоритмов Эдмондса нахождения паросочетания максимальной мощности и максимального веса. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 306—327.
9. Карзанов А. В. Справочная для выборки максимального элемента и ее приложения. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 348—359.
10. Карзанов А. В., Ломоносов М. В. Системы потоков в неориентированных сетях. — В сб.: Математическое программирование. Проблемы социальных и экономических систем. Модели исследования операций. Вып. 1. М., ВНИИСИ, 1978, с. 59—66.
11. Куперштох В. Л. Об одном обобщении теоремы Форда и Фалкерсона на многополюсные сети. — Киев, «Кибернетика», 1971, № 3.
12. Ломоносов М. В. О системе потоков в сети. — Проблемы передачи информации, 1978, т. 13, № 4.
13. Ломоносов М. В. Решение двух задач о потоках в сети. — Проблемы передачи информации, 1979, т. 14, № 1.
14. Оре О. Теория графов. М., «Наука», 1968.
15. Папернов Б. А. Эквивалентные поточковые многополюсники. — В сб.: Вопросы кибернетики. Вып. 3. М., 1973.
16. Папернов Б. А. Реализуемость многопродуктовых потоков. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976.
17. Фараджев И. А. Эффективные алгоритмы решения некоторых задач для ориентированных графов. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1970, т. 10, № 4, с. 1049—1054.
18. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. М., «Мир», 1966.
19. Харари Ф. Теория графов. М., «Мир», 1973.
20. Ху Т. Ч. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М., «Мир», 1974.
21. Черкасский Б. В. Конечный алгоритм решения задачи о двухпродуктовом потоке. — «Экономика и математические методы», 1973, т. 9, № 6, с. 1147—1149.
22. Черкасский Б. В. Многополюсные двухпродуктовые задачи. — В сб.: Исследования по дискретной оптимизации. М., «Наука», 1976, с. 261—289.
23. Черкасский Б. В. Решение одной задачи о многопродуктовых потоках в сети. — «Экономика и математические методы», 1977, т. 13, № 1.
24. Черкасский Б. В. Алгоритм построения максимального потока в сети с трудоемкостью $O(n^2\sqrt{p})$ действий. — В сб.: Математические методы в экономических исследованиях. Вып. 7. М., «Наука», 1977, с. 117—126.

25. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1962.
 26. Balinsky M. L. Establishing the matching polytope. J. Comb. Theory, Ser. B, 1972, v. 13B, № 1, pp. 1—13.
 27. Cook S. A. The Complexity of Theorem—Proving Procedures. Conf. Ref. 3-rd Annual ACM Sympos. Theory Comp., N. Y., 1971, pp. 151—158.
 28. Cunningham W. H., Marsh A. B. A primal algorithm for optimum matching. In: Mathematical Programming Study, v. 8, 1978, pp. 50—72.
 29. Dijkstra E. W. A Note on Two Problems in Connection with Graphs. Numerical Mathematik, 1959, v. 1, pp. 269—271.
 30. Edmonds J. Maximum matcing and polyhedron with 0,1-vertices. J. of Research, 1965, v. 698, № 1, 2.
 31. Edmonds J. Edge-disjoint branchings. In: Combinatorial Algorithms, R. Rustin (ed.), Algorithmics Press, N. Y., 1972, pp. 91—96.
 32. Edmonds J. Paths, trees and flowers. Can. J. Math., 1965, v. 17, № 3.
 33. Edmonds J., Karp R. M. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems. J. ACM, v. 19, № 2, pp. 248—264.
 34. Even S. V., Itai A., Shamir A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problem. SIAM J. Comput., 1976 (Dec.), v. 5, № 4.
 35. Fulkerson D. R., Harding G. C. On edge-disjoint branchings. Networks, 1976, v. 6, pp. 97—104.
 36. Iri M. On an Extension of the Maximum-flow Minimum-cut Theorem to Multi-commodity Flows. J. Operat. Res. Soc. Japan., 1970/71, v. 13, pp. 129—135.
 37. Karp R. M. Redusibility among Combinatorial Problems. Proc. Sympos. on Complexity of Computer Computations, N. Y., Plenum Press, 1972.
 38. Lovász L. On two minimax theorems in graph. J. Comb. Theory, Ser. B, 1976, v. 21, pp. 96—103.
 39. Lucchessi C., Younger D. H. A minimax theorem for directed graphs. Proc. London Math. Soc., 1978, v. 17, Ser. 2, pp. 269—375.
 40. Onaga K., Kakusho O. On Feasibility Conditions of Multicommodity Flows in Networks. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1971, CT-18, № 4, pp. 425—429.
 41. Perl Y., Shiloach Y. Finding Two Disjoint Paths Between Two Pairs of Vertices in a Graph. J. of the Assoc. for Comput. Mach., 1978, v. 25, № 1, pp. 1—9.
 42. Pulleyblank N., Edmonds J. Facets of 1-matching polyhedra. In: Hypergraph seminar. Lecture Notes in Math., № 411, pp. 111—126, Springer, Berl.-N. Y., 1974.
 43. Seymour P. D. The Matroids with the Max-Flow Min-Cut Property. J. of Comb. Theory, Ser. B, 1977, v. 23, pp. 189—222.
 44. Tarjan R. E. Depth-First Search and Linear Graph Algorithms. SIAM J. Comput., 1972, v. 1, pp. 146—160.
 45. Tarjan R. E. Finding edge-disjoint spanning trees. Proc. 8th. Haw. Int. Conf. Syst. Sci, Honolulu, Haw., 1975.
 46. Tarjan R. E. A good algorithm for edge-disjoint branchings. Inform. Process. Letters, 1974. v. 3, № 2, pp. 51—53.
-