АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

12

МОСКВА · 1984

УДК 519.17

О ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

КАРЗАНОВ А. В.

(Москва)

Рассматриваются три вида задач оптимизации на замкнутых множествах ориентированного графа. Показывается, что две из них являются NP-трудными, и предлагается эффективный комбинаторный алгоритм решения третьей задачи.

1. Рассмотрим ориентированный граф $G=(V, E)$. Ребро с начальной вершиной v и конечной вершиной w обозначим vw. Для произвольной функции $f: V\to\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел) и подмножества $V'\subseteq V$ пусть $f(V')$ обозначает величину $\Sigma(f(v): v\in V')$. Подмножество $X\subseteq V$ называется *замкнутым множеством* графа G, если в G нет ребер с началом в $V\backslash X$ и концом в X, т. е. из $w\in X$ и $vw\in E$ следует $v\in X$. В частности, $\varnothing$ и V – замкнутые множества.

Задача I. Для заданных неотрицательных весов $a(v)$, $b(v)$ вершин $v\in V$ и числа B найти замкнутое множество X, имеющее минимальный вес $a(X)$ при условии $b(X)\geqslant B$.

Этой задаче можно дать следующую интерпретацию: если вершины графа соответствуют работам, ребра – отношениям очередности их выполнения, числа $a(v)$ и $b(v)$ выражают, соответственно, величину затрат на выполнение работы v и приносимый ею доход, то требуется выбрать для исполнения некоторое множество работ, гарантирующих доход не менее B, минимизируя суммарные затраты и соблюдая условие, что для выполнения каждой работы нужно выполнить все работы, ей предшествующие [1].

Покажем, что вариант задачи I, в котором условие минимизации $a(X)$ заменено условием $a(X)\leqslant A$, является NP-полным в сильном смысле уже для класса ориентированных двудольных графов (и, в частности, задача I является NP-трудной). Для этого сведем к такому варианту NP-полную задачу существования в неориентированном графе $H=(W, U)$ клики (полного подграфа) с заданным числом вершин k (см. [1]). Образуем ориентированный граф $G=(V, E)$, сопоставив каждой вершине $w\in W$ вершину $v_w\in V$ и каждому ребру $u\in U$ вершину $v_u\in V$; вершины v и v' в G соединяются ориентированным ребром vv' в том и только в том случае, когда $v=v_w$ и $v'=v_u$ для некоторого ребра $u\in U$ и инцидентной ему вершины $w\in W$. Очевидно, $X\subseteq V$ является замкнутым множеством тогда и только тогда, когда из $u\in U$, $v_u\in X$ следует v_w, $v_{w'}\in X$, где w и w' – вершины в H, инцидентные u, т. е. замкнутые множества в G соответствуют подграфам в H.

Положим $a(v_w)=1$ $(w\in W)$, $a(v_u)=0$ $(u\in U)$, $b\equiv 1$, $A=k$, $B=k+k(k-1)/2$. Если $H'=(W', U')$ – клика в H и $|W'|=k$, то множество $X=\{v_w: w\in W'\}\cup\{v_u: u\in U'\}$ замкнутое и удовлетворяет $a(X)=|W'|=A$ и $b(X)=|X|=B$. Обратно: если $X\subseteq V$ – замкнутое множество и $a(X)\leqslant A$, $b(X)\geqslant B$, то для подграфа $H'=(W', U')$ с $W'=\{w\in W: v_w\in X\}$ и $U'=\{u\in U: v_u\in X\}$ должно выполняться $|W'|\leqslant k$ и $|U'|\geqslant B-A=k(k-1)/2$, откуда следует, что H' – клика с k вершинами.

Нетрудно видеть, что вариант задачи I является NP-полным также для класса ориентированных двудольных графов, функций b, принимающих значения 0 и 1, и функций $a\equiv 1$.

2. Сопоставим каждой вершине $v\in V$ булеву переменную $x(v)$. Задачу I можно записать в виде

(1) $\quad x(v)\in\{0, 1\}, \qquad v\in V,$

(2) $\quad x(v)-x(w)\geqslant 0, \qquad vw\in E,$

(3) $\quad bx\geqslant B,$

(4) $\quad ax\to\min$

[1] Задача I и формулируемая ниже задача III, а также их интерпретации сообщены автору Л. Г. Хачияном.

(условие (2) равносильно тому, что множество $X=\{v\in V : x(v)=1\}$ замкнутое). Рассмотрим следующие аналоги задачи I.

Задача II. Получается из (1) – (4) заменой условия (1) линейным условием

(5) $$0\leqslant x(v)\leqslant 1, \qquad v\in V.$$

Задача III. Получается из (1) – (4) заменой (1) на (5) и

(6) $$vw\in E, \qquad x(w)>0\Rightarrow x(v)=1.$$

В интерпретации последних задач величина $x(v)$ означает степень выполнения работы v, при этом величины затрат и дохода для работы v считаются пропорциональными $x(v)$. В задаче II предполагается, что степень выполнения предшествующей работы должна быть не меньшей, чем у последующей, а в задаче III – что если некоторая работа выполняется частично, то предшествующие ей работы должны быть выполнены полностью.

Та же конструкция показывает, что вариант задачи III (на допустимость) является NP-полным для класса ориентированных двудольных графов и функций $a:V\to\{0,1\}$ и $b\equiv 1$. Достаточно убедиться, что если x – вектор, удовлетворяющий (5), (2), (6) и условиям $ax\leqslant k$ и $bx\geqslant k+k(k-1)/2$, то x имеет координаты только 0 и 1 и множество вершин $W'=\{w\in W : x(v_w)=1\}$ порождает в H клику размера k.

3. Для решения задачи II предлагается комбинаторный алгоритм, имеющий полиномиальную трудоемкость. Допустим, что функция a может принимать значения любого знака, в то время как функция b по-прежнему считается неотрицательной. Для произвольной функции $c:V\to\mathbf{R}$ замкнутое множество $X\subseteq V$ с минимальной величиной $c(X)$ назовем *с-минимальным множеством*. Алгоритм использует процедуру нахождения c-минимального множества, о которой будет сказано ниже. Для произвольного числа α пусть a^α обозначает функцию $a-\alpha b$.

Можно считать, что $b(V)\geqslant B$, иначе задача не имеет решения. Перед очередной итерацией алгоритма имеются числа β, γ, $0\leqslant\beta\leqslant\gamma$, а также a^β-минимальное множество X и a^γ-минимальное множество Y, для которых $X\subseteq Y$ и справедливо либо $b(X)<B<b(Y)$, либо $b(X)=b(Y)=B$ и $\beta=\gamma$. Положим $Z=Y\backslash X$. Если $\beta=\gamma$, то оптимальное решение x задачи (5), (2) – (4) определяется следующим образом

(7) $$x(v)=\begin{cases} 1, & v\in X,\\ 0, & v\in V-Y,\\ \lambda=(B-b(X))/b(Z), & v\in Z\end{cases}$$

(если $b(Z)=0$, то по определению полагается $\lambda=0$), и алгоритм оканчивается. Если же $\beta<\gamma$ (и, следовательно, $b(X)<B<b(Y)$), то производятся следующие действия. Полагаем $\delta=a(Z)/b(Z)$ (очевидно, $a^\delta(X)=a^\delta(Y)$; кроме того, доказывается, что $\beta\leqslant\delta\leqslant\gamma$). В подграфе $G_Z=(Z, E_Z)$ графа G, порожденном множеством вершин Z и имеющем веса вершин $c(v)=a^\delta(v)$, $v\in Z$, отыскиваем c-минимальное множество Q. Полагаем $X^*=X\cup Q$ и $d=a^\delta(X^*)$ (доказывается, что X^* есть a^δ-минимальное множество в G). Переходим к следующей итерации, объекты β, γ, X, Y которой определяются по правилам: 1) $\beta:=\gamma:=\delta$ в случае $a^\delta(X)(=a^\delta(Y))=d$; 2) $\beta:=\gamma:=\delta$, $X:=Y:=X^*$ в случае $a^\delta(X)>d$ и $b(X^*)=B$ (в этих двух случаях следующая итерация окажется заключительной); 3) $\gamma:=\delta$, $Y:=X^*$ в случае $a^\delta(X)>d$ и $b(X^*)>B$; 4) $\beta:=\delta$, $X:=X^*$ в случае $a^\delta(X)>d$ и $b(X^*)<B$ (неуказанные объекты остаются прежними). Легко видеть, что начальные условия следующей итерации выполняются. Очевидно, текущее множество $Y\backslash X$ от итерации к итерации монотонно уменьшается, кроме, может быть, перехода к заключительной итерации, поэтому число итераций не превосходит $|V|+1$.

В начале алгоритма полагаем $\beta=0$ и в качестве начального X берем произвольное a-минимальное множество. Начальное γ полагаем равным $(a(V_a)+1)/\bar{b}$, где $V_a=\{v : a(v)>0\}$, $\bar{b}=\min\{b(v) : v\in V_b\}$ и $V_b=\{v : b(v)>0\}$, и находим произвольное a^γ-минимальное множество Y^0 (доказывается, что $Y^0\supseteq V_b$ и, следовательно, $b(Y^0)\geqslant B$). Возможны следующие случаи: 1) $b(X)\geqslant B$, и тогда $x=\theta_X$ – оптимальное решение (здесь и далее $\theta_{V'}$ для произвольного $V'\subseteq V$ обозначает характеристическую функцию подмножества V', т. е. $\theta_{V'}(v)$ равно 1 для $v\in V'$ и 0 для $v\in V\backslash V'$); 2) $b(Y^0)=B$, и тогда $x=\theta_{Y^0}$ – оптимальное решение; 3) $b(X)<B<b(Y^0)$, и тогда приступаем к

первой итерации алгоритма, полагая $Y=Y^0\cup X$ (доказывается, что Y — тоже a^γ-минимальное множество).

Обоснование алгоритма следует из лемм 1—3. Прежде всего заметим, что если X' и Y' — замкнутые множества, то множества $X'\cap Y'$ и $X'\cup Y'$ тоже замкнутые, т. е. замкнутые множества в G образуют решетку.

Лемма 1. *Пусть $\alpha\leqslant\varepsilon$, S есть a^α-минимальное множество, T есть a^ε-минимальное множество, $S'=S\cap T$ и $T'=S\cup T$. Тогда S' будет a^α-минимальным множеством, а T' будет a^ε-минимальным множеством.*

Доказательство. Ввиду a^α-минимальности S, неотрицательности b и очевидного равенства $S\backslash S'=T'\backslash T$ имеем

$$0\geqslant a^\alpha(S)-a^\alpha(S')=a(S\backslash S')-\alpha b(S\backslash S')\geqslant a(S\backslash S')-\varepsilon b(S\backslash S')=$$

$$=a^\varepsilon(S\backslash S')=a^\varepsilon(T'\backslash T)=a^\varepsilon(T')-a^\varepsilon(T).$$

Теперь из a^ε-минимальности T следует $a^\varepsilon(T')=a^\varepsilon(T)$ и $a^\alpha(S)=a^\alpha(S')$.

Лемма 1 обосновывает, в частности, определение начального Y по X и Y^0. Следующая лемма доказывает корректность перехода от текущей итерации к следующей.

Лемма 2. *Пусть β, γ, δ, X, Y, Z, X^* — объекты на итерации алгоритма. Тогда $\beta\leqslant\delta\leqslant\gamma$ и X^* будет a^δ-минимальным множеством.*

Доказательство. В силу a^β-минимальности X имеем $a(X)-\beta b(X)\leqslant$ $\leqslant a(Y)-\beta b(Y)$, откуда $\beta\leqslant a(Z)/b(Z)=\delta$. Аналогично показывается, что $\gamma\geqslant\delta$. Пусть W — некоторое a^δ-минимальное множество в G. Согласно лемме 1, $W'=W\cup X$ является также a^δ-минимальным множеством; по той же лемме, a^δ-минимальным множеством является также $\tilde{X}=W'\cap Y$. Очевидно, $X\subseteq\tilde{X}\subseteq Y$. Второе утверждение леммы следует из простого наблюдения, что для произвольного X', $X\subseteq X'\subseteq Y$, выполняется $a^\delta(X')-a^\delta(X'\backslash X)=a^\delta(X)=\text{const}$ и X' является замкнутым множеством в G в том и только том случае, когда $X'\backslash X$ — замкнутое множество в G_Z.

Лемма 3. *Пусть $\beta\geqslant0$, X и Y есть a^β-минимальные множества, $X\subseteq Y$, $b(X)\leqslant$ $\leqslant B\leqslant b(Y)$ и $Z=Y\backslash X$. Тогда x, определенное согласно* (7), *является решением задачи* (5), (2)—(4).

Доказательство. Легко проверить, что x удовлетворяет (5) и (2) и что $bx=B$. Кроме того, $a^\beta x=a^\beta(X)=a^\beta(Y)=r$ ввиду $x=\lambda\theta_Y+(1-\lambda)\theta_X$. Надо доказать, что для любого $x':V\to\mathbf{R}$, удовлетворяющего (5), (2), (3), справедливо $ax'\geqslant ax$. Матрица ограничений (5), (2) вполне унимодулярна (поскольку матрица ограничений (2) — это матрица инциденций вершин и ребер ориентированного графа), следовательно, $x'=\lambda_1\theta_{X^1}+\ldots+\lambda_p\theta_{X^p}$, где $\lambda_i\geqslant0$, X^i — замкнутое множество, $i=1, 2,\ldots, p$ и $\lambda_1+\ldots$ $\ldots+\lambda_p=1$. Учитывая неотрицательность β и a^β-минимальность X и Y, имеем

$$ax'=a^\beta x'+\beta bx'\geqslant\sum_{i=1}^p\lambda_i a^\beta(X^i)+\beta B\geqslant r+\beta B=a^\beta x+\beta B=ax,$$

что и требовалось.

Замечание 1. Указанное в доказательстве леммы разложение вектора x' можно получить и непосредственно. А именно: покажем, что $x'=\lambda_1\theta_{X^1}+\ldots+\lambda_p\theta_{X^p}$, где $X^1\supset\ldots\supset X^{p-1}\supset X^p=\varnothing$ — замкнутые множества, $\lambda_1+\ldots+\lambda_{p-1}=q(x')=\max\{x'(v):$ $:v\in V\}$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p\geqslant0$ и $\lambda_p=1-q(x')$. Действительно, если $x'\neq0$, то представим x' как $\lambda_1\theta_{X^1}+x''$, где $X^1=\operatorname{supp}(x')=\{v:x'(v)\neq0\}$ и $\lambda_1=\min\{x'(v):v\in X^1\}$. Тогда x'' удовлетворяет (5) и (2), $q(x'')=q(x')-\lambda_1$ и $\operatorname{supp}(x'')\subset\operatorname{supp}(x')$, откуда индукцией по $|\operatorname{supp}(x')|$ получаем требуемое.

Лемма 3 обосновывает окончание алгоритма на соответствующей итерации, а также в том случае, когда для Y^0 выполняется $b(Y^0)=B$ (надо положить в лемме $X=Y=Y^0$ и $\beta=\gamma$). Если в начале алгоритма было $b(X)\geqslant B$, то $x=\theta_X$ оптимален по тривиальным соображениям. Осталось обосновать выбор Y^0, т. е. доказать, что если $\gamma=(a(V_a)+1)/\bar{b}$ и Y^0 есть a^γ-минимальное множество, то $V_b\subseteq Y^0$. Действительно, если это не так, то

$$a^{\gamma}(V\setminus Y^0)=a(V\setminus Y^0)-\gamma b(V\setminus Y^0)\leqslant a(V_a)-\gamma b<0$$

и, следовательно, $a^{\gamma}(V)<a^{\gamma}(Y^0)$, что противоречит a^{γ}-минимальности Y^0.

Алгоритм использует (не более $|V|+2$ раз) процедуру нахождения c-минимального множества ориентированного графа $G'=(V', E')$. Такая процедура предложена в [2] и состоит в решении задачи о максимальном потоке и минимальном разрезе, а именно: добавим к G' вершины s и t и множества ребер $E_1=\{sv: v\in V', c(v)>0\}$ и $E_2=\{vt: v\in V', c(v)<0\}$ и зададим пропускные способности h ребер полученного графа как $h(e)=c(v)$ для $e=sv\in E_1$, $h(e)=|c(v)|$ для $e=vt\in E_2$ и $h(e)=\infty$ для $e\in E'$. Несложно доказать, что подмножество $Q\subseteq V'$ является c-минимальным (замкнутым) множеством в G' тогда и только тогда, когда разрез $((V'\setminus Q)\cup\{s\}, V'\cup\{t\})$ имеет минимальную пропускную способность среди разрезов, отделяющих s от t.

Предложенный алгоритм решения задачи II имеет трудоемкость $O(n^2+n\sigma(n, m))$, где $n=|V|$, $m=|V|+|E|$ и $\sigma(n, m)$ – трудоемкость применяемой процедуры нахождения максимального потока в сети с n вершинами и m ребрами.

Замечание 2. Процедуру Пикара можно стандартным способом расширить до процедуры выделения решетки всех c-минимальных множеств в G' (в виде порождающего ее ациклического графа), потратив дополнительно $O(|V'|+|E'|)$ действий. Это позволяет выбирать на шагах алгоритма эвристически более выгодные подмножества в G. Например, в качестве начальных X и Y^0 целесообразно брать, соответственно, наибольшее a-минимальное и наименьшее a^{γ}-минимальное множества, а на итерации алгоритма вместо одного a^{δ}-минимального множества X^* можно искать два a^{δ}-минимальных множества, X_1^* и X_2^*, удовлетворяющих $b(X_1^*)\leqslant B\leqslant b(X_2^*)$, и, если такие найдутся, сразу переходить к заключительной итерации, полагая $X:=X_1^*\cap X_2^*$ и $Y:=X_1^*\cup X_2^*$.

Отметим также, что отыскиваемое алгоритмом оптимальное решение $x=\lambda\theta_Y+(1-\lambda)\theta_X$ не обязательно является вершиной многогранника ограничений (5), (2), (3), однако при желании выбор a^{δ}-минимальных множеств на предпоследней итерации можно легко изменить таким образом, чтобы они определили оптимальную вершину этого многогранника (здесь используется тот факт, что ребра многогранника ограничений (5), (2) соответствуют таким парам вершин $\{\theta_{X'}, \theta_{Y'}\}$, где X', Y' – замкнутые множества в G, что $X'\subset Y'$ и что подграф $G_{Z'}$, порожденный множеством вершин $Z'=Y'\setminus X'$, является связным в неориентированном смысле).

Замечание 3. Алгоритм нетрудно модифицировать так, чтобы он отыскивал последовательность замкнутых множеств $X^1\subset\ldots\subset X^r$ и чисел $0<\beta_1<\ldots<\beta_{r-1}$ таких, что X^1 есть a-минимальное множество, X^i, X^{i+1} есть a^{β_i}-минимальные множества и $b(X^1)<\ldots<b(X^r)=b(V)$. Такая предварительная обработка позволяет затем быстро находить оптимальное решение задачи II при произвольном B, а именно: если $b(X^r)<B$, то задача не имеет решения, если $b(X^1)\geqslant B$, то оптимальным решением является $x=\theta_{X^1}$, в остальных случаях надо выбрать такое i, что $b(X^i)<B<b(X^{i+1})$, и определить оптимальное решение x в соответствии с (7) (при $X=X^i$ и $Y=X^{i+1}$).

Замечание 4. Как известно, произвольная конечная дистрибутивная решетка $\mathscr{L}$ изоморфна решетке замкнутых множеств некоторого ациклического ориентированного графа G (см. [3]), вещественным функциям на вершинах графа G взаимно однозначно соответствуют нормализованные модулярные функции на $\mathscr{L}$ (т. е. такие функции $f:\mathscr{L}\to\mathbf{R}$, что $f(\alpha)+f(\beta)=f(\alpha\wedge\beta)+f(\alpha\vee\beta)$, $\alpha, \beta\in\mathscr{L}$, и $f(\bar{0})=0$, где $\bar{0}$ – минимальный элемент в $\mathscr{L}$). Рассмотренным задачам можно сопоставить их прямые аналоги на дистрибутивных решетках и применить полученные результаты к исследованию и решению последних.

Литература

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. *Picard J. C.* Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems.– Manag. Sci., 1976, v. 22, № 11, p. 1268–1272.
3. *Биркхоф Г.* Теория структур. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 21.III.1983
Переработанный вариант 7.V.1984