Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР
Ярославский государственный университет

КАЧЕСТВЕННЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных трудов
Под редакцией доц. В. С. Климова

ЯРОСЛАВЛЬ 1985

Содержание

Богатова В.П. Теоремы о разрешимости для вырождающихся эллиптических псевдодифференциальных уравнений с параметром 3

Камбулов В.Ф., Колесов Ю.С., Майоров В.В., Федотов Н.Б. К вопросу о расчете энергетических характеристик квантового генератора . . . 6

Соболев С.И. Пример инвариантной меры для динамической системы, порожденной нелинейным гиперболическим уравнением 10

Климов В.С. Двусторонние оценки значений выпуклых вариационных задач 22

Скрипник В.П. О сходимости в L_2 решений уравнений с малой матрицей при производной 33

Семко Е.Р. Усреднение функций из пространств Орлича-Соболева 42

Смирнов Е.И. О сопряженном пространстве к пространству Суслина 52

Климов В.С., Семко Е.Р., Токалова Е.В. О корректности задачи минимизации интегрального функционала 60

Карзанов А.В. О минимальных по среднему весу разрезах и циклах ориентированного графа 72

Тихонов В.П. К задаче об ω-периодических решениях для уравнения с запаздывающим аргументом 83

Баланов З.И., Винниченко С.В. К задаче о вычислении вращения эквивариантного поля . . 89

Доброхотова М.А., Горинская Н.Ю. О свойствах решения Коши одного линейного дифференциального уравнения третьего порядка 98

Корнилов П.А. Об условии Никишина линейности множества сумм функционального ряда 102

Соловьев А.Ф. К теореме Фавара 111

Бычкова Т.Г., Онуфриева Е.Ю., Хидиров Ю.Э. Неравенство Фридрихса для анизотропных классов функций 117

приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль, 1977, вып. 2, с. 193–203.

Ярославский университет

УДК 519.854.2

А.В. Карзанов

О МИНИМАЛЬНЫХ ПО СРЕДНЕМУ ВЕСУ РАЗРЕЗАХ И ЦИКЛАХ ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

I. Введение

В дискретной оптимизации весьма интересный раздел составляют задачи поиска подмножества заданного вида, имеющего минимальный или максимальный усредненный вес элемента. Формальная постановка такой задачи состоит в следующем. Пусть E – некоторое конечное множество, на котором задана вещественная весовая функция $c: E \to \mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{F} \subset 2^E$ – некоторая совокупность непустых подмножеств в E. Весом подмножества $E' \subseteq E$ считается величина $c(E') = \Sigma(c(e): e \in E')$, а его средним весом $m_c(E')$ – величина $c(E')/|E'|$. Требуется найти множество $F \in \mathcal{F}$, средний вес $m_c(F)$ которого минимален (или максимален). Поскольку мы не будем делать предположений о знаках функции c, достаточно будет ограничиться рассмотрением задачи на минимум. Она будет именоваться задачей о минимальном среднем и обозначаться $M(\mathcal{F}, c)$. Значение минимума будет обозначать $m^* = m^*(\mathcal{F}, c)$.

Нас будут интересовать задачи о среднем для различных семейств разрезов и циклов ориентированного графа. Одни из таких задач оказываются труднорешаемыми (NP-трудными), а другие полиномиально разрешимыми. Кроме того, мы рассмотрим линейный аналог задачи о среднем и изложим общий метод ее решения

вместе с доказательством теоремы двойственности.

Уточним используемые определения и обозначения. Будем рассматривать слабосвязный (т.е. связный в неориентированном смысле) ориентированный граф $G = (V, E)$, в котором допускаются кратные ребра. Начальная вершина ребра $e \in E$ обозначается $t(e)$, а конечная – $h(e)$. Под путем (циклом) в G будем понимать реберное множество $\{e_0, \dots, e_{k-1}\}$ чередующейся последовательности $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{k-1}, v_k$ ($k \geq 1$) вершин и ребер, в которой $\{t(e_i), h(e_i)\} = \{v_i, v_{i+1}\}$ и все вершины $v_0, \dots, v_k$ различны (различны, кроме $v_0 = v_k$). Путь (цикл) называется ориентированным, если $t(e_i) = v_i$ для всех i. Множество ориентированных циклов в G обозначим $\mathcal{C}^+ = \mathcal{C}^+(G)$, а через $\mathcal{C}^+_e$ будем обозначать множество ориентированных циклов, содержащих выделенное ребро $e \in E$. Для $X \subseteq V$ пусть $\partial^+ X$ ($\partial^- X$) обозначает множество ребер в G с началом в X и концом в $V \setminus X$ (соответственно с началом в $V \setminus X$ и концом в X). Непустое множество $\partial^+ X$ называется разрезом и называется ориентированным разрезом, если, кроме того, $\partial^- X = \emptyset$.

Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}(G)$ и $\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(G)$ обозначают соответственно множество разрезов и множество ориентированных разрезов в G. Для упорядоченной пары (S, t) вершин в G пусть $\mathcal{R}_{St}$ обозначает множество (S,t)-разрезов (т.е. разрезов $\partial^+ X$, для которых $S \in X \not\ni t$) и $\mathcal{R}^+_{St}$ обозначает множество ориентированных (S,t)-разрезов. Для функции (вектора) $x \in \mathbb{R}^E$ положим $|x| = \Sigma(|x(e)|: e \in E)$ (мы не делаем различий между множеством $\mathbb{R}^E$ вещественнозначных функций на E и линейным пространством $\mathbb{R}^{|E|}$, координаты которого соответствуют элементам в E).

Среди задач о минимальном среднем наиболее популярна задача о минимальном среднем ориентированном цикле $M(\mathcal{C}^+, c)$ (см., например, [I, раздел 8.4.]), где рассматривается даже более общая задача с двойными весами). Первоначальные алгоритмы ее решения (см. ссылки в [I]) имели "дихотомический" характер и были "слабо полиномиальными", т.е. решали задачу при целочисленных весах C с оценкой числа действий $O(P(|E|)\log(C))$, где $P(n)$ – некоторый полином. Впоследствии для нее был найден

"сильно полиномиальный" алгоритм [2], т.е. алгоритм, работающий с "вещественными" C, число действий которого ограничено полиномом от $|E|$.

"Дихотомический" метод основан на двух простых соображениях, справедливых и для произвольного $\mathcal{F}$. Пусть задача $O(\mathcal{F},C')$ состоит в выяснении, существует ли в $\mathcal{F}$ множество F отрицательного веса $C'(F)<0$; наличие такого F равносильно $m^*(\mathcal{F},C')<0$. Назовем сдвигом функции C на число $a\in\mathbb{R}$ функцию C^a, определенную как $C^a(e)=C(e)+a$, $e\in E$; ясно, что $m_{C^a}(E')=m_C(E')+a$ для любого $E'\subseteq E$, следовательно, $m^*(\mathcal{F},C^a)=m^*(\mathcal{F},C)+a$. Таким образом, определение, справедливо ли для заданного $a\in\mathbb{R}$ неравенство $m^*(\mathcal{F},C)<-a$, эквивалентно задаче $O(\mathcal{F},C^a)$. Это означает, что в классе целочисленных функций C задача вычисления m^* (а следовательно, и задача $M(\mathcal{F})$) полиномиально эквивалентна задаче $O(\mathcal{F})$ (так как m^* – дробь со знаменателем $\le|E|$, то число шагов в дихотомическом процессе вычисления m^* можно ограничить величиной $2|E|^2\log_2|C|$).

Из полиномиальной эквивалентности задач $M(\mathcal{F})$ и $O(\mathcal{F})$ можно сделать вывод о труднорешаемости (NP-трудности) задач $M(\mathcal{C}_e^+)$, $M(\mathcal{R}_{St})$ и $M(\mathcal{R})$. В общем виде конструкция такова. Пусть $MAX(\mathcal{F},\kappa)$ обозначает задачу выяснения для натурального κ, существует ли в $\mathcal{F}$ множество F мощности $|F|$ не менее κ. Предположим, что все множества в $\mathcal{F}$ содержат общий элемент $e\in E$. Тогда задача $MAX(\mathcal{F},\kappa)$ сводится к задаче $O(\mathcal{F},C)$, где $C(e)=\kappa-1$ и $C(e')=-1$ $(e'\in E\setminus\{e\})$. Таким образом, из труднорешаемости $MAX(\mathcal{F})$ должна следовать труднорешаемость $O(\mathcal{F})$ и $M(\mathcal{F})$. Известно же, что задачи $MAX(\mathcal{C}_e^+)$ и $MAX(\mathcal{R}_{St})$ являются NP-полными (первая – это вариант задачи об ориентированном гамильтоновом цикле, а вторая – о максимальном (S,t)-разрезе в ориентированном графе, в котором в данном случае есть ребро с началом S и концом t).

Из труднорешаемости $M(\mathcal{R}_{St})$ следует труднорешаемость $M(\mathcal{R})$. Действительно, рассмотрим задачу $O(\mathcal{R}_{St},C)$. Для каждой вершины $v\in V\setminus\{S,t\}$ добавим в граф G новые ребра e_v и e'_v, для которых $t(e_v)=S$, $h(e_v)=t(e'_v)=v$, $h(e'_v)=t$, а также ребро e^v с началом S и концом t; положим $C(e_v)=C(e'_v)=b$, $C(e^v)=(|V|-2)b$, где $b>|C|$; пусть G' – получившийся граф. Легко видеть, что для любого $X\subset V$ выполняется $C(\partial^+_G X)=C(\partial^+_{G'}X)$, если $S\in X\not\ni t$, и $C(\partial^+_{G'}X)>0$ – в противном случае. Таким образом, задача $O(\mathcal{R}_{St},C)$ сводится к задаче $O(\mathcal{R}(G'),C)$, откуда следует требуемое. Можно показать, что $M(\mathcal{R})$ и $M(\mathcal{R}_{St})$ NP-трудны уже для класса симметричных графов G и симметрических $C\in\mathbb{Z}^E$, т.е. когда имеется взаимно однозначное отображение $\varphi: E\to E$ такое, что φ^2 – тождественное отображение, и для любого $e\in E$ выполняется $t(e)=h(\varphi(e))$ и $C(e)=C(\varphi(e))$.

В пунктах 2 и 3 будут предложены два сильно полиномиальных алгоритма решения задачи о минимальном среднем ориентированном разрезе $M(\mathcal{R}^+,C)$. В пункте 2 описываются также сильно полиномиальные алгоритмы для задачи $M(\mathcal{R}^+_{St},C)$ (при произвольных G и C) и для задачи $M(\mathcal{R},C)$ в случае симметричного графа G и кососимметрической функции C. Алгоритм пункта 3 является следствием излагаемого там общего метода решения задачи о среднем в линейных пространствах. Этот метод составляет главное содержание настоящей работы. В качестве другой иллюстрации метода будет показано, как с его помощью получить сильно полиномиальный алгоритм для задачи о минимальном среднем ориентированном цикле (этот алгоритм отличен от предложенного в [2]).

2. Алгоритм, связанный с решением задачи минимизации веса

Идею алгоритма можно изложить для произвольных $\mathcal{F}\subset 2^E$ и $C\in\mathbb{R}^E$. Пусть $MIN(\mathcal{F},C')$ обозначает задачу нахождения множества $F\in\mathcal{F}$, имеющего минимальный вес $C'(F)$. Покажем, что задача $M(\mathcal{F},C)$ может быть сведена к не более чем $|E|$ задачам $MIN(\mathcal{F},C')$.

Вначале произведем сдвиг C на достаточно большое отри-

цательное число a (например на $a=-\max\{c(e): e\in E\}$) с тем, чтобы для полученной функции c было $m^*(\mathcal{F},c)\le 0$. Пусть c – текущая функция на некоторой итерации и $F\in\mathcal{F}$ – множество минимального веса $c(F)$. Если $c(F)<0$, то перейдем к следующей итерации, произведя сдвиг $c:=c^a$, где $a=-c(F)/|F|$. Если же $c(F)=0$, то, очевидно, F – искомое решение задачи $M(\mathcal{F},c)$ (для начального и всех промежуточных c). Покажем, что число итераций не превосходит $|E|+1$, и на последней итерации имеет место $c(F)=0$. Пусть c', c'', F', F'' обозначают соответственно функцию c перед началом двух идущих подряд итераций и решения задач $MIN(\mathcal{F},c')$ и $MIN(\mathcal{F},c'')$. Ясно, что $c'(F')<0$, $c'(F')\le c'(F'')$ и $c''(F'')=c''(F')=0$. Если $c''(F'')<0$, то, учитывая $c''(F')=c'(F')+a|F'|$, $c''(F'')=c'(F'')+a|F''|$, где $a=-c'(F')/|F'|>0$, получаем $|F''|<|F'|$, откуда следует указанная оценка числа итераций.

В случае $\mathcal{F}=\mathcal{R}^+$ задача $MIN(\mathcal{F},c)$ (при $m^*(\mathcal{F},c)\le 0$) эквивалентна известной задаче минимизации модулярной функции на дистрибутивной решетке. Поясним, как устроен алгоритм решения задачи $MIN(\mathcal{R}^+,c)$. Для каждой вершины $v\in V$ положим $d(v)=d_{w_c}(v)$, где для $x\in\mathbb{R}^E$ $d_w(v)$ обозначает величину $\Sigma(x(e): e\in E, t(e)=v)-\Sigma(x(e): e\in E, h(e)=v)$. Нетрудно убедиться, что для любого ориентированного разреза ∂^+X справедливо $c(\partial^+X)=d(X)\ (=\Sigma(d(v): v\in X))$. Таким образом, при $m^*(\mathcal{F},c)\le 0$ задача $MIN(\mathcal{R}^+,c)$ эквивалентна задаче нахождения замкнутого вершинного множества X минимального веса $d(X)$ (множество $X\subseteq V$ считается замкнутым, если $\partial^-X=\emptyset$; очевидно, $\emptyset$ и V – тоже замкнутые множества, и $d(\emptyset)=d(V)=0$, что вынуждает нас накладывать условие $m^*(\mathcal{F},c)\le 0$). Для последней задачи известен сильно полиномиальный алгоритм потокового типа [3] (см. также [4]), таким образом, мы получаем сильно полиномиальный алгоритм и для исходной задачи $M(\mathcal{R}^+,c)$.

Чтобы получить сильно полиномиальный алгоритм для задачи $M(\mathcal{R}^+_{st},c)$, сведем задачу $MIN(\mathcal{R}_{st},c')$ к задаче $MIN(\mathcal{R}^+(G'),c')$. Здесь граф G' образуется из G добавлением ребра e^* и ребер e_v, e'_v для каждого $v\in V\setminus\{s,t\}$, как это делалось выше при доказательстве трудноразрешимости $M(\mathcal{R})$; для добавленных ребер c полагается $c'(e)=0$. Легко видеть, что множество ориентированных разрезов в G' соответствует множеству ориентированных (s,t)-разрезов в G и соответствующие разрезы имеют одинаковый вес, что и требуется.

В заключение этого пункта рассмотрим задачу $M(\mathcal{R},c)$ для случая, когда граф G симметричный, а функция c – кососимметрическая, т.е. $c(e)=-c(\varrho(e))$, $e\in E$, где ϱ – реберная симметрия в G. Отметим, что задача $O(\mathcal{R},c)$ для таких G и c тривиальна, но это никак не помогает в решении задачи $M(\mathcal{R},c)$, поскольку при сдвиге функции c нарушается свойство кососимметричности. Образуем граф G', заменив в G каждую пару ребер $\{e,e'\}$, $e'=\varrho(e)$ парой ребер $\{e^1,e^2\}$ и вершиной v такими, что $t(e^1)=t(e)$, $t(e^2)=t(e')$, $h(e^1)=h(e^2)=v$; положим $c'(e^1)=-c'(e^2)=c(e)$. Нетрудно видеть, что каждому разрезу ∂^+X в G соответствует некоторое множество ориентированных разрезов ∂^+X' в G', причем $c(\partial^+X)=c'(\partial^+X')$, $|\partial^+X|\le|\partial^+X'|$, и для одного из этих X' последнее неравенство обращается в равенство. Отсюда, ввиду очевидного свойства $m^*(\mathcal{R},c)\le 0$, решение для $M(\mathcal{R}^+(G'),c')$ дает решение для $M(\mathcal{R},c)$. Аналогично решается и задача $M(\mathcal{R}_{st},c)$ для указанных G и c в том случае, когда известно, что $m^*(\mathcal{R}_{st},c)\le 0$ (последнее легко проверить, решив задачу $O(\mathcal{R}_{st},c)$).

3. Задача о среднем в линейных пространствах

Для $q\in\mathbb{R}^E$ будем обозначать через q^+, q^-, $S(q)$, $S^+(q)$, $S^0(q)$ соответственно функции (векторы) со значениями $\max\{q(e),0\}$ и $\min\{q(e),0\}$ $(e\in E)$ (положительную и отрицательную срезки q) и множества $\{e: c(e)\ne 0\}$, $\{e: c(e)>0\}$, $\{e: c(e)<0\}$ и $\{e: c(e)=0\}$.

Пусть заданы вектор $c\in\mathbb{R}^E$ и некоторое множество Q векторов из неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^E_+=\{x\in\mathbb{R}^E: x\ge 0\}$, для которых

$$\bigcup(S(x): x\in Q)=E. \qquad (1')$$

Задача о минимальном среднем для Q и c, обозначаемая $M(Q,c)$, состоит в отыскании вектора $x \in Q$ с минимальной величиной $m_c(x) = cx/|x|$, где $cx = \Sigma(c(e)x(e) : e \in E)$ и $|x| = \Sigma(|x(e)| : e \in E)$; значение минимума (если оно существует) обозначим $m^* = m^*(Q,c)$.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q)$ и $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q)$ обозначают соответственно линейную и неотрицательную линейную оболочки векторов в Q. Ясно, что для $x, x' \in \mathbb{R}^E_+ \setminus \{0\}$ и $\lambda > 0$ справедливо $m_c(\lambda x) = m_c(x)$, $m_c(x+x') \geq \min\{m_c(x), m_c(x')\}$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $m_c(x) = m_c(x')$; следовательно, $m^*(Q,c) = m^*(\mathcal{K},c)$, и всякий вектор, участвующий в разложении оптимального решения задачи $M(\mathcal{K},c)$ в положительную линейную комбинацию векторов из Q, есть оптимальное решение для $M(Q,c)$. Множество Q называют конформно полным (в $\mathbb{R}^E_+$), если $\mathcal{K} = \mathcal{L}^+$, где $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cap \mathbb{R}^E_+$.

Подобно $M(\mathcal{F},c)$, задача $M(Q,c)$ остается эквивалентной при сдвиге функции c на любое число a. Другим преобразованием, сохраняющим cx и $m_c(x)$ для любого $x \in \mathcal{L}^+$, является преобразование $c := c + y$, где y – произвольный вектор из ортогонального дополнения $\mathcal{L}^\perp$ к $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^E$. Очевидно, $m^*(Q,c) \geq \min\{c(e) : e \in E\}$. Б.А.Паперное установил следующую теорему.

Теорема. Если множество $Q \subset \mathbb{R}^E_+$ конформно полное и $c \in \mathbb{R}^E$, то найдется $y^* \in \mathcal{L}^\perp(Q)$ такое, что $c(e) + y^*(e) \geq m^*(Q,c)$ для любого $e \in E$ (и, следовательно, если $x \in Q$ – оптимальное решение для $M(Q,c)$, то $S(x) \subset \{e \in E : c(e) + y^*(e) = m^*(Q,c)\}$), иными словами, справедливо

$$m^*(Q,c) = \max_{y \in \mathcal{L}^\perp(Q)} \min_{e \in E} \{c(e) + y(e)\}.$$

Мы предлагаем метод решения задачи $M(\mathcal{L}^+,c)$, из которого, в частности, следует доказательство данной теоремы. Очевидно, можно считать, что

$$\cup(S(x) : x \in \mathcal{L}^+) = E. \qquad (1)$$

Вначале произведем сдвиг c на достаточно большое отрицательное число так, чтобы заведомо выполнялось $m^*(\mathcal{L}^+,c) < 0$. Алгоритм состоит из итераций. На каждой итерации происходит преобразование текущего c, состоящее в прибавлении к нему вектора $y \in \mathcal{L}^\perp$ (не изменяющее m^*) и затем, быть может, в сдвиге c на некоторое число $a > 0$ (увеличивающее m^* на a). Если на итерации происходит сдвиг c, то также будет найден вектор x^*, для которого при новом c будет $cx^* = 0$. В процессе итераций будет соблюдаться свойство монотонности: множество $S^-(c)$ может только сужаться, и пока $e \in E$ принадлежит $S^-(c)$, величина $c(e)$ монотонно не убывает. В конце концов текущий вектор c станет всюду неотрицательным. Тогда для последнего найденного x^* из $cx^* = 0$ будет, очевидно, следовать $m_c(x^*) = 0 = m^*(\mathcal{L}^+,c)$, т.е. x^* – оптимальное решение задачи $M(\mathcal{L}^+,c)$ для последнего (а значит, и для нечетного и для всех промежуточных) c. Сумма всех найденных векторов y дает требуемый в теореме вектор y^*, а сумма всех найденных a – число m^*.

Опишем итерацию. На ней фиксируется элемент $\tau \in S^-(c)$ и решается пара двойственных друг другу линейных программ:

$$\left.\begin{array}{l} y(\tau) \to \max, \\ y \in \mathcal{L}^\perp, \\ -y(e) \leq c^+(e),\ e \in E \setminus \{\tau\}; \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} c^+ x \to \min, \\ x \in \mathcal{L}^+, \\ x(\tau) = 1 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

(чтобы убедиться в двойственности (2) и (3), нужно записать (2) в стандартной форме, заменив условие $y \in \mathcal{L}^\perp$ равенствами $z^i y = 0$, $i = 1, \ldots, N$, где $\{z^1, \ldots, z^N\}$ – базис в $\mathcal{L}$, и сделать затем простые преобразования в стандартной двойственной задаче). Поскольку (2) имеет допустимое решение $y = 0$ и (3) также имеет допустимое решение ввиду условия (I), то (2) и (3) имеют оптимальные решения y и x и $y(\tau) = c^+ x$. Положим $c' = c + y$. Соотношения дополняющей нежесткости для (2) и (3) имеют вид:

$e \in E \setminus \{\tau\}$, $-y(e) < c^+(e) \Rightarrow x(e) = 0$,
отсюда для $e \in S(x) \setminus \{\tau\}$ получаем

$$c'(e) = 0, \text{ если } c(e) \geq 0, \tag{4}$$

$$c'(e) = c(e), \text{ если } c(e) < 0. \tag{5}$$

Если $c'(\tau) \geq 0$, то полагаем $c := c'$. Если же $c'(\tau) < 0$, то полагаем $a = -c'x / |x|$, $c := c'^a$, $x^* := x$ (из (4), (5) следует $c'(e) \leq 0$ для всех $e \in S(x)$, поэтому $a > 0$). Таким образом, для x^* и нового c справедливо $cx^* = 0$. Заметим, что из ограничений для y в (2) и положительности a следует выполнение свойства монотонности. Если все еще $S^-(c) \neq 0$, то переходим к следующей итерации, при этом соблюдается правило: при $c(\tau) < 0$ на следующей итерации фиксируется тот же самый элемент τ.

Докажем конечность алгоритма. Итерацию назовем существенной, если на ней произошло уменьшение множества $S^-(c)$; очевидно, таких итераций не более $|E|$. Достаточно установить конечность числа идущих подряд несущественных итераций. Покажем, что это число ограничено сверху как числом η образующих (крайних лучей) конуса $\mathcal{L}^+$, так и величиной $q^2|E|$, где q – максимум значений координат векторов, задающих образующие в $\mathcal{L}^+$, при условии их целочисленности (минимальное из таких q иногда называют дробностью конуса). Рассмотрим две подряд идущие несущественные итерации. Согласно правилу на них фиксируется один и тот же элемент τ. Положим $\mathcal{D} = S^+(c) \cup S^0(c)$. Пусть c_i, c_i', x_i, y_i, a_i, $i = 1, 2$, – соответствующие объекты на первой ($i = 1$) и второй ($i = 2$) из рассматриваемых итераций; тогда $c_2 = c_1'^{a_1}$. Покажем, что $x_1(\mathcal{D}) \geq x_2(\mathcal{D})$. Очевидно, $c_2(e) \geq a_1$ для всех $e \in \mathcal{D}$, и из (4) следует $c_2(e) = a_1$ при $e \in S(x_1) \cap \mathcal{D}$. Из $c_2 x_1 = c_2^+ x_1 + c_2^- x_1 = 0$ получаем $|c_2^- x_1| = c_2^+ x_1 = a_1 x_1(\mathcal{D})$, откуда ввиду $x_1(\tau) = 1$ имеем $|c_2(\tau)| \leq a_1 x_1(\mathcal{D})$. С другой стороны, выполняется

$|c_2(\tau)| \geq y_2(\tau) = c_2^+ x_2 \geq a_1 x_2(\mathcal{D})$. Таким образом, $a_1 x_1(\mathcal{D}) \geq a_1 x_2(\mathcal{D})$, откуда $x_1(\mathcal{D}) \geq x_2(\mathcal{D})$. Далее, пусть $x_i = \lambda_i^1 z_i^1 + \ldots + \lambda_i^{m(i)} z_i^{m(i)}$, $i = 1, 2$, где все $\lambda_i^j > 0$ и z_i^j – крайние векторы в $\mathcal{L}^+$ с $z_i^j(\tau) = 1$. Ясно, что каждый вектор z_i^j является оптимальным решением задачи (3) (при $c = c_i$). Пусть z_1^ℓ и z_2^κ – векторы с максимальными (в своих наборах) величинами $z_1^\ell(\mathcal{D})$ и $z_2^\kappa(\mathcal{D})$. Тогда $z_1^\ell(\mathcal{D}) \geq x_1(\mathcal{D})$ и $x_1(\mathcal{D}) \geq z_2^\kappa(\mathcal{D})$ (аналогично доказанному для x_2). Для завершения доказательства достаточно заметить, что количество различных значений $z(\mathcal{D})$ для крайних векторов z с $z(\tau) = 1$ не превосходит указанных величин η и $q^2|E|$.

Вернемся к рассмотрению задачи $M(\mathcal{F}, c)$. Она соответствует задаче $M(Q(\mathcal{F}), c)$, где $Q(\mathcal{F})$ – совокупность характеристических векторов множеств в $\mathcal{F}$. Если $Q(\mathcal{F})$ конформно полное, то описанный метод решает эту задачу, причем число итераций не превосходит $|E|^2$, поскольку в этом случае $q = 1$ (в действительности, как легко видеть из приведенного доказательства, справедлива оценка $|E|\rho$, где $\rho = \max\{|F| : F \in \mathcal{F}\}$). Таким образом, для построения эффективного алгоритма для $M(\mathcal{F}, c)$ надо "уметь" эффективно решать задачи (2) и (3).

Из известных утверждений линейной алгебры следует, что конформная полнота $Q(\mathcal{F})$ эквивалентна тому, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q(\mathcal{F}))$ есть множество решений системы $Ax = 0$ с унимодулярной матрицей A размера $m \times |E|$, где m – коранг $\mathcal{L}$. Известно также, что в случаях $\mathcal{F} = \mathcal{R}^+$ и $\mathcal{F} = \mathcal{C}^+$ пространства $\mathcal{L}$ могут быть заданы унимодулярными матрицами A; в первом случае это матрица инцидентностей фундаментальных циклов и ребер, а во втором – вершин и ребер в G. Следовательно, множества $Q(\mathcal{R}^+)$ и $Q(\mathcal{C}^+)$ конформно полные (заметим, что множества $Q(\mathcal{R}_{st}^+)$ и $Q(\mathcal{C}_e^+)$, вообще говоря, не являются конформно полными).

Поясним, как решаются (2) и (3) для $\mathcal{F} = \mathcal{R}^+$. Будем считать, что G не содержит ориентированных циклов, что соответствует условию (1'). Нетрудно видеть, что $\mathcal{L}^\perp$ – это про-

странство циркуляций в G, т.е. множество таких функций $y \in R^E$, что $div_y(v) = 0$ для всех $v \in V$. Пусть $\tau \in S^-(c)$ – ребро с началом t и концом s. Тогда (2) – это задача построения циркуляции y с максимальным значением в ребре τ при нижних пропускных способностях $-c^+(e)$ (это сводится к обратной задаче о максимальном потоке из s в t путем введения для каждого $e \in E$ противоположного ребра с пропускной способностью $c^+(e)$). Характеристический вектор соответствующего минимального (s,t) – разреза (он определяется ориентированным разрезом) дает оптимальное решение x в (3). Заметим, что доказательство конечности числа итераций при работе с элементом τ конкретизируется таким образом: в процессе итераций в строящихся разрезах $\partial^+ X$ строго уменьшается число ребер e, для которых $c(e) > 0$. Итак, алгоритм решения задачи $M(R^+, c)$ состоит из решения $\leq |E|^2$ задач о максимальном потоке.

Рассмотрим теперь задачу $M(C^+, c)$. Условию (I) соответствует сильная связность G. Легко видеть, что $\mathcal{L}^\perp$ – это пространство функций $y = y_\pi \in R^E$, порожденных "потенциальными" функциями $\pi \in R^V$, т.е. $y(e) = \pi(h(e)) - \pi(t(e))$, $e \in E$. Пусть $\tau \in S^-(c)$ – ребро с началом t и концом s. Тогда задача (2) – это задача построения такой функции y_π, что $\pi(s) - \pi(t)$ максимально при условии, что $\pi(t(e)) - \pi(h(e)) \leq c^+e$ для всех $e \in E$, т.е. задача о кратчайшем ориентированном пути из t в s в графе с обратной ориентацией всех ребер при тех же длинах c^+. Характеристический вектор соответствующего ориентированного пути из s в t, дополненного ребром τ, будет оптимальным решением в (4). На итерациях работы с ребром τ в отыскиваемых путях монотонно убывает число ребер e, для которых $c(e) > 0$. Таким образом, алгоритм состоит из не более $|V||E|$ итераций и, следовательно, имеет трудоемкость $O(|V|^3|E|)$ (это уступает алгоритму в [2], имеющему трудоемкость $O(|V||E|)$).

Литература

I. Кристофидес Н. Теория графов. – М.: Мир, 1978.

2. Karp R.M. A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. – Discrete Math., 1978, 23, N 3, p. 309-311.

3. Picard J.C. Maximal closure of a graph and applications to combinatorial problems. – Management Sci., 1976, 22, N 11, p. 1268-1272.

4. Карзанов А.В. О замкнутых множествах ориентированного графа. – ЖВМ и МФ, 1984, т. 24, № 12.

ВНИИСИ Центральный экономико-математический институт

УДК 517.948

В.П. Тихонов

К ЗАДАЧЕ ОБ ω-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

В работе рассматривается задача об ω-периодических решениях для уравнения с запаздывающим аргументом. Исследуется общая теория определяющих уравнений, анонсируются теоремы родственности для различных операторных уравнений, решения которых определяют ω-периодические решения (уравнение Пуанкаре-Красовского, интегральное уравнение, аналог уравнения А.М.Самойленко).

I. Пусть R – числовая ось, R^n – конечномерное пространство, $X(t,x)$ – определенный при $t \in R$, $x \in C[-h,0]$ оператор со значениями в R^n; здесь $C[-h,0]$ – пространство определенных и непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в R^n. Будем предполагать, что оператор $X(t,x)$ непрерывен, ограничен:

$$\|X(t,x)\| \leq L(R) \quad (\|x\| \leq R), \tag{I}$$

и удовлетворяет условию Липшица с постоянной k: