ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28, 1988 № 9

УДК 519.17

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИГРЫ И НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАКСНЫХ СРЕДНИХ ЦИКЛОВ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

ГУРВИЧ В. А., КАРЗАНОВ А. В., ХАЧИЯН Л. Г.

(Москва)

Описывается алгоритм нахождения оптимальных стационарных стратегий в динамических конфликтах двух лиц в условиях полной информированности, детерминированности переходов, конечности множеств позиций и усредненного предельного по времени интегрального платежа.

§ 1. Введение

В работе описывается алгоритм отыскания оптимальных стационарных стратегий в динамических конфликтах двух лиц с полной информацией, противоположными интересами и предельным, усредненным по времени интегральным платежом. Описываемая ниже постановка задачи, которую будем называть циклической игрой, включает в себя в качестве частного случая известную из комбинаторной оптимизации задачу отыскания цикла в ориентированном графе, максимального по средней стоимости ребра. Частным случаем циклических игр являются также эргодические расширения матричных игр и конечные позиционные игры с полной информацией. Сами циклические игры — частный случай стохастических игр с полной информацией.

Возможная интерпретация циклической игры состоит в следующем. Динамическая система с конечным множеством состояний V находится в каждый момент времени $t=0, 1, \ldots$ в одном из состояний $v(t)\in V$. Динамика системы описывается ориентированным графом переходов $G=(V, E)$, ребро $e=vu\in E$ которого означает возможность перехода из состояния $v=v(t)$ в состояние $u=v(t+1)$ в момент времени t. Кратные ребра в графе G будем считать отсутствующими, однако среди ребер могут иметься петли $e=vv$. Граф G предполагается бесступиковым, т. е. для каждой вершины $v\in V$ множество $E(v)$ выходящих из этой вершины ребер не может быть пустым. На ребрах графа задана платежная функция c: $E\to\mathbb{R}$, в максимизации которой в среднем

$$\lim_{t\to\infty}\Big[\sum_{\tau=0}^{t-1} c(v(\tau)v(\tau+1))\Big]t^{-1}\to\max$$

по траектории $\{v(0)\ldots v(t)\ldots\}$ системы состоит задача управления. Обозначим через $V(v)$ множество состояний, достижимых за один шаг из состояния v системы, т. е. множество концевых вершин ребер $E(v)$. Если в каждый момент времени выбор нового состояния $v(t+1)\in V(v(t))$ находится в нашем распоряжении, т. е. в любом состоянии система полностью контролируема, рассматриваемая задача, очевидно, сводится к поиску цикла максимальной средней стоимости, достижимого из начального состояния $v(0)$. (Для нахождения такого цикла известны эффективные сильнополиномиальные алгоритмы [1], [2].) При этом для каждого со-

стояния $v \in V$ существует не зависящий от времени и начального состояния $v(0)$ выбор s перехода $u \in V(v)$, обеспечивающий при $t \to \infty$ оптимальный выигрыш по траектории. Отображение $s : v \to V(v)$ естественно интерпретируется как оптимальная стационарная стратегия управления системой на бесконечном интервале времени.

Пусть теперь множество V состояний системы разбито на два непересекающихся подмножества A и B ($A \cup B = V$, $A \cap B = \varnothing$), так что выбор перехода $u \in V(v)$ находится в нашем распоряжении лишь при условии принадлежности состояния $v(t)$ к множеству A контролируемых состояний. Исходя из концепции гарантированного выигрыша, будем считать, что в состояниях $v(t) \in B$ выбор перехода $u \in V(v)$ осуществляется противоборствующей стороной, и назовем состояния $v \in A$ и $v \in B$ *позициями* (с правом выбора хода) Белых и Черных. Рассмотрим пару отображений

$$s_A\colon v \to V(v) \text{ для } v \in A, \qquad s_B\colon v \to V(v) \text{ для } v \in B,$$

которые будем называть *стационарными стратегиями* Белых и Черных. Если зафиксировать пару стационарных стратегий s_A, s_B обеих сторон, то при заданной начальной позиции $v = v(0)$ средний предельный платеж по траектории будет равен величине $\bar{c}(s_A, s_B, v)$ среднего платежа по циклу, на который выйдет система. Определенная на декартовом произведении конечных множеств стационарных стратегий Белых и Черных функция $\bar{c}(s_A, s_B, v)$ задает циклическую игру в нормальной форме. Эта же игра в развернутом виде задается указанием игровой сети (G, A, B, c) и начальной позиции v.

Как будет видно из дальнейшего, для любой начальной позиции $v \in V$ имеет место дискретное тождество минимакса

$$\max_{s_A} \min_{s_B} \bar{c}(s_A, s_B, v) = \min_{s_B} \max_{s_A} \bar{c}(s_A, s_B, v) = p(v), \tag{1}$$

означающее существование оптимальных стационарных стратегий Белых и Черных в циклической игре. При этом, подобно случаю поиска максимального среднего цикла $V = A$, оптимальные стационарные стратегии обеих сторон могут быть выбраны равномерными, т. е. не зависящими от начальной позиции v (хотя, разумеется, цена $p(v)$ различных начальных позиций может быть разной). Это позволяет говорить об оптимальных стационарных стратегиях для игровой сети (G, A, B, c), которую для краткости будем иногда называть просто сетью. Далее, если профакторизовать множество V позиций по всевозможным значениям $p_1 < \ldots < p_m$ цены $p(v)$, то получившееся разбиение $(V_1, \ldots, V_m)$ вершин графа переходов будет обладать следующими свойствами:

1) для каждого i подграф в G, порожденный V_i, является беступиковым;

2) для любых $1 \leqslant i < j \leqslant m$ множества ребер $E(V_i \cap A, V_j)$ и $E(V_j \cap B, V_i)$ пусты, т. е. среди ребер G у Белых отсутствуют переходы из классов V_i с меньшими номерами в классы V_j с бóльшими, а у Черных — наоборот, отсутствуют переходы из классов V_j с бóльшими номерами в классы V_i с меньшими.

Разбиение вершин двуцветного беступикового графа (G, A, B) с указанными свойствами будем называть эргодическим (и нетривиальным при $m \geqslant 2$). Таким образом, при факторизации позиций по ценам возникает эргодическое разбиение, в эргодических классах V_i которого цена всех по-

зиций одинакова, и при оптимальном поведении Белых и Черных игра, начавшись в классе V_i, никогда его не покидает. В том случае, когда это разбиение тривиально, т. е. цены всех позиций $v \in V$ одинаковы, игровая сеть (G, A, B, c) называется эргодической. Наконец, отметим, что если Белые придерживаются оптимальной стационарной стратегии, то Черные не могут сделать свой средний предельный проигрыш за один шаг меньшим $p(v)$ даже за счет перехода к нестационарным стратегиям, и наоборот, так что ситуация равновесия (1) сохраняется и в нестационарных стратегиях.

Для того чтобы показать справедливость сформулированных выше утверждений и описать алгоритм нахождения оптимальных стационарных стратегий в игровых сетях, рассмотрим потенциальные преобразования $c'(vu)=c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u)$ платежей на ребрах сети, где $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ — произвольная заданная на вершинах сети вещественная функция, называемая потенциалом. Поскольку потенциальные преобразования $c \xrightarrow{\varepsilon} c'$ не меняют (средней) стоимости циклов, они сохраняют нормальную форму циклической игры, и поэтому цены и множества оптимальных стратегий в сетях (G, A, B, c) и (G, A, B, c') совпадают. В связи с этим будем в дальнейшем называть получающиеся в результате потенциальных преобразований платежные функции c' *эквивалентными* функциями c.

Оказывается, существует функция c', эквивалентная c, для которой определение цен и поиск оптимальных стратегий в сети становятся тривиальными: при каждом своем ходе Белые (Черные) могут выбирать среди ребер, исходящих из текущей позиции, ребро максимальной (минимальной) стоимости, причем эта стоимость будет сохраняться по траектории. Для функции $c : E \to \mathbb{R}$ и вершины $v \in A \cup B$ определим величину

$$\operatorname{ext}(c, v) = \begin{cases} \max\{c(vu) : u \in V(v)\}, & \text{если } v \in A, \\ \min\{c(vu) : u \in V(v)\}, & \text{если } v \in B, \end{cases}$$

и множество вершин

$$\operatorname{VEXT}(c, v) = \{u \in V(v) : c(vu) = \operatorname{ext}(c, v)\}.$$

Ребро vu, для которого $c(vu)=\operatorname{ext}(c, v)$, назовем экстремальным (относительно c). Через $\|\cdot\|_\infty$ будем обозначать норму покомпонентного максимума модулей.

Теорема. *Пусть (G, A, B, c) — произвольная игровая сеть.* 1. *Существуют числа $p(v)$, $v \in V$, и функция c', эквивалентная c, такие, что верно следующее*:

а) $p(v)=\operatorname{ext}(c', v)$ *для всех* $v \in V$,

б) $p(v)=p(u)$ *для* $v \in A \cup B$ *и* $u \in \operatorname{VEXT}(c', v)$,

в) $p(v) \geqslant p(u)$ *для* $v \in A$ *и* $u \in V(v)$,

г) $p(v) \leqslant p(u)$ *для* $v \in B$ *и* $u \in V(v)$,

д) $\|c'\|_\infty \leqslant 2n\|c\|_\infty$, *где* $n=|V|$.

2. *Числа $p(v)$, удовлетворяющие условиям* а)—г), *определяются по сети однозначно.*

Функцию c' и сеть (G, A, B, c'), для которых выполнены свойства а)—г) в теореме, будем в дальнейшем называть каноническими. Поскольку для канонической сети все сформулированные до теоремы утверждения очевидным образом выполнены, п. 2 теоремы в отдельном доказательстве не нуждается. Ясно также, что имеет место

Следствие. Любые отображения $s_A : A \to V$ и $s_B : B \to V$, для которых $s_A(v)$ и $s_B(v)$ принадлежат $\mathrm{VEXT}(c', v)$, являются оптимальными стационарными (равномерными) стратегиями Белых и Черных (возможно, что не все оптимальные стационарные стратегии могут быть получены таким образом).

Следует отметить, что существование цен и оптимальных стационарных стратегий в циклических играх можно получить из общей теоремы о стационарных оптимальных стратегиях в стохастических играх [3], доказываемой неконструктивно с помощью теоремы о неподвижной точке. В [4] рассмотрена циклическая игра для случая полного двудольного графа G с долями A и B (эргодические расширения матричных игр) и показано существование потенциального преобразования $c \xrightarrow{\varepsilon} c'$, для которого $\mathrm{ext}(c', v) = \mathrm{const}$. Эта последняя константа называется эргодической ценой матричной игры $c(A, B)$. В доказательстве в [4] также использована теорема о неподвижной точке.

Целью настоящей статьи является изложение алгоритма приведения к каноническому виду произвольной сети (G, A, B, c) с целочисленной платежной функцией $c : E \to \mathbb{Z}$. Таким образом будет получено конструктивное доказательство теоремы 1 для целочисленного случая. Общий (вещественный) случай будет следовать из соответствующего предельного перехода по платежам.

Перед описанием алгоритма остановимся еще на трех моментах.

1. Назовем двуцветный беступиковый граф переходов (G, A, B) эргодическим, если игровая сеть (G, A, B, c) эргодична при любых платежах c на ребрах. Нетрудно видеть, что граф неэргодичен тогда и только тогда, когда он допускает нетривиальное эргодическое разбиение $(V_1, \ldots, V_m)$, причем без ограничения общности это разбиение можно считать разрезом $m=2$. Примером эргодического графа является полный двудольный граф с долями A и B, соответствующий эргодическим расширениям матричных игр. Как показал В. Н. Лебедев (дипломная работа студента МФТИ, 1987 г.), задача распознавания неэргодичности произвольных двуцветных беступиковых графов NP-полна.

2. Оптимальные стационарные стратегии циклической игры, в которых достигается ситуация равновесия (1), являются чистыми: они имеют детерминированный характер и выбор переходов $s_A(v)$ и $s_B(v)$ осуществляется без бросания монеты. Если интересы игроков в циклической игре не противоположны, то ситуация равновесия по Нэшу в чистых стационарных стратегиях s_A и s_B может не существовать. Минимальный пример такого рода дает циклическая игра на полном двудольном графе с тремя позициями a_1, a_2, a_3 Белых и тремя позициями b_1, b_2, b_3 Черных, в которой выигрыши Белых и Черных при переходе по ребру (a_i, b_j) в любом направлении задаются матрицами

$$c_A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{Vmatrix}, \qquad c_B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

при достаточно малом ε, например $\varepsilon = 0.1$, а в качестве начальной позиции v берется любая, скажем $v = a_1$. Белые и Черные имеют по 27 стационарных стратегий, и можно непосредственно убедиться в том, что в соответствующей (27×27)-биматричной игре с платежными матрицами $\bar{c}_A(s_A, s_B, v)$ и $\bar{c}_B(s_A, s_B, v)$ ситуации равновесия по Нэшу отсутствуют. Таким

образом, эргодическое расширение биматричной игры 3×3 может не иметь ситуаций равновесия в чистых стационарных стратегиях. Используя [5], можно показать, что эргодические расширения биматричных игр $2\times n$ ситуацию равновесия в чистых стационарных стратегиях всегда имеют. Построенный пример показывает, что между циклическими и позиционными играми с полной информацией имеются принципиальные различия, а также что существование равновесия в чистых стационарных стратегиях не является прямым следствием полной информированности и усредненного по $t\to\infty$ интегрального вида платежа.

3. Вернемся к рассмотрению антагонистических платежей и предположим, что в игровой сети кроме белых $v\in A$ и черных $v\in B$ позиций имеются еще и позиции случая $v\in C$, в каждой из которых задано свое распределение вероятностей $\pi(vu)$ на множестве $V(v)$ возможных переходов:

$$\pi(vu)>0,\quad u\in V(v),\qquad \Sigma\{\pi(vu):u\in V(v)\}=1.$$

Частными случаями этой модели стохастической игры с полной информацией являются марковские цепи с доходами $V=C$, управляемые марковские цепи $V=A\cup C$, циклические игры $V=A\cup B$ и задача о максимальном среднем цикле $V=A$. Зафиксируем пару чистых стационарных стратегий s_A и s_B Белых и Черных и будем считать, что предписываемые ими ходы делаются с вероятностью 1. В результате получится марковская цепь с доходами, в которой, как известно, для любой начальной позиции $v\in V=A\cup B\cup C$ существует предел при $t\to\infty$ ожидаемого платежа в расчете на один ход. Этот сохраняющийся при потенциальных преобразованиях предел по-прежнему обозначим через $\bar c(s_A, s_B, v)$. Для функции $\bar c(s_A, s_B, v)$ дискретное тождество минимакса (1) останется в силе, поскольку теорема о приведении сети к каноническому виду распространяется на стохастические игры следующим образом: в позициях случая $v\in C$ величина

$$\mathrm{ext}(c, v)=\Sigma\{\pi(vu)c(vu):u\in V(v)\}$$

доопределяется как средний платеж по возможным за один шаг переходам в соответствии с заданным на них распределением вероятностей («непосредственно ожидаемый доход» [6]), условие б) теоремы дополняется требованием

$$p(v)=\Sigma\{\pi(vu)p(u):u\in V(v)\},\qquad v\in C,$$

сохранения цен в среднем в позициях случая и, наконец, оценка д) величины модулей платежей в канонической сети переписывается в виде $\|c'\|_\infty\leqslant 2n\|c\|_\infty/\gamma$, где γ — минимальная из заданных в позициях случая ненулевых вероятностей $\pi(vu)$ переходов. В частности, остается в силе и следствие из теоремы, позволяющее находить по каноническому виду стохастической игры с полной информацией оптимальные для нее чистые стационарные стратегии. Возможно также дальнейшее обобщение теоремы в ее «трехцветном» варианте и на дисконтированные платежи (см. [3]), если использовать потенциальные преобразования вида $c'(vu)=c(vu)+\varepsilon(v)-\alpha\varepsilon(u)$, где $\alpha\in[0, 1)$ — коэффициент дисконтирования, так что рассматриваемый в работе средний предельный платеж будет соответствовать дисконтированному при $\alpha\to1$. Однако описываемый ниже комбинаторный алгоритм на эти случаи не распространяется, и поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением циклических игр.

§ 2. Вспомогательный алгоритм

Алгоритм приведения сети (G, A, B, c) к каноническому виду использует в качестве процедуры описываемый ниже вспомогательный алгоритм, применяемый сначала к исходной сети, а затем к некоторым ее подсетям с преобразованными стоимостями ребер. Вспомогательный алгоритм конечен для произвольной входной вещественной платежной функции c. В его описании будем придерживаться исходных обозначений. На вход вспомогательного алгоритма подается некоторая сеть (G, A, B, c). Положим

$$M=M(G, A, B, c)=\max\{\mathrm{ext}(c, v) : v\in V\},$$

$$m=m(G, A, B, c)=\min\{\mathrm{ext}(c, v) : v\in V\},$$

и пусть

$$p:=(M+m)/2.$$

Величина p будет сохранять присвоенное значение во время всей работы вспомогательного алгоритма. Отметим, что если $M-m=0$, то сеть имеет канонический вид (и эргодична), поэтому в дальнейшем полагаем $M-m>0$.

В результате работы вспомогательного алгоритма будет найдена функция c', эквивалентная c, для которой во всех вершинах сети

$$m\leqslant\mathrm{ext}(c', v)\leqslant M \tag{2}$$

и справедливо одно из следующих трех утверждений:

А) $\mathrm{ext}(c', v)\geqslant p$ $\forall v\in V$;

Б) $\mathrm{ext}(c', v)\leqslant p$ $\forall v\in V$;

В) найдено правильное разбиение (V', V'') вершин сети (G, A, B, c'); это означает, что (V', V'') — эргодическое разбиение (G, A, B), $\mathrm{ext}(c', v)\leqslant p$ при $v\in V'$ и $\mathrm{ext}(c', v)\geqslant p$ при $v\in V''$, $\mathrm{VEXT}(c'v)\cap V'\neq\varnothing$ при $v\in V'$ и $\mathrm{VEXT}(c', v)\cap V''\neq\varnothing$ при $v\in V''$.

В случаях А) или Б) в результате работы вспомогательного алгоритма осуществляется дихотомия отрезка $[m, M]$ вариации величины ext на сети. В случае В) возникновения правильного разбиения для приведения сети (G, A, B, c') к каноническому виду достаточно привести к каноническому виду независимо друг от друга две порожденные эргодическими блоками V' и V'' игровые подсети, в каждой из которых интервал вариации величины ext снова сокращен в два раза по сравнению с первоначальным. После дальнейшего рекурсивного применения вспомогательного алгоритма блоки V' и V'' могут, в свою очередь, снова распасться, и так далее, вплоть до появления эргодических классов.

Работа вспомогательного алгоритма состоит из итераций, на которых функция c подвергается потенциальным преобразованиям. Пусть c — текущая функция в процессе работы алгоритма. Вершину $v\in V$ назовем критической, недостаточной и избыточной, если $\mathrm{ext}(c, v)$, соответственно, равно, меньше и больше p. Множества критических, недостаточных и избыточных вершин обозначим через $K(c)$, $S(c)$ и $T(c)$, а множества белых (черных) позиций среди них — через $K^A(K^B)$, $S^A(S^B)$, $T^A(T^B)$. Аналогично, ребро vu назовем критическим, недостаточным и избыточным, если $c(vu)$, соответственно, равно, меньше и больше p. Отметим, что выходящее из критической вершины ребро критично тогда и только тогда, когда оно экстремально.

На итерациях алгоритма применяются потенциальные преобразования специального вида. Функцию $c' : E \to \mathbb{R}$ назовем сдвигом функции $c : E \to \mathbb{R}$ на величину δ относительно множества вершин L, если

$$c'(vu) = \begin{cases} c(vu) + \delta & \text{для } vu \in E(L, \bar{L}), \\ c(vu) - \delta & \text{для } vu \in E(\bar{L}, L), \\ c(vu) & \text{для остальных ребер,} \end{cases}$$

где $\bar{L}$ означает множество $V \setminus L$; очевидно, преобразование сдвига является потенциальным с потенциалом $\varepsilon(v) = \delta$ при $v \in L$ и $\varepsilon(v) = 0$ при $v \in \bar{L}$.

В процессе работы алгоритма будет соблюдаться свойство монотонности: для каждой вершины v величина $|\mathrm{ext}(c, v) - p|$ не будет возрастать с сохранением знака $\mathrm{ext}(c, v) - p$. В частности, если в какой-то момент вершина станет критической, то она будет оставаться таковой до конца алгоритма (хотя множество исходящих из нее критических ребер может меняться). Ясно, что свойство монотонности обеспечит выполнение неравенства (2). Из свойства монотонности также следует, что множества S недостаточных и T избыточных вершин от итерации к итерации не возрастают по включению. Если какое-то из них окажется пустым, будет иметь место случай А) или Б) и вспомогательный алгоритм закончит работу. Поэтому при описании итерации вспомогательного алгоритма будем считать, что для текущей функции c множества $S = S(c)$ и $T = T(c)$ непусты.

Шаг 1. Строится помеченное множество вершин L, для которого выполняется следующее:

1) $S \subseteq L \subseteq V - T$;

2) каждое ребро, ведущее из $L^A = L \cap A$ в $\bar{L}$, недостаточное, а каждое ребро, ведущее из $\bar{L}^B = \bar{L} \cap B$ в L, избыточное, что эквивалентно требованиям

$$\mathrm{VEXT}(c, v) \subseteq L \quad \forall v \in K^A \cap L, \qquad \mathrm{VEXT}(c, v) \subseteq \bar{L} \quad \forall v \in K^B \cap \bar{L};$$

3) для каждой помеченной критической вершины Черных имеется хотя бы одно исходящее критическое ребро, ведущее в помеченную вершину, и, аналогично, для каждой непомеченной критической вершины Белых имеется хотя бы одно исходящее критическое ребро, ведущее в непомеченную вершину:

$$\mathrm{VEXT}(c, v) \cap L \neq \varnothing \quad \forall v \in K^B \cap L,$$
$$\mathrm{VEXT}(c, v) \cap \bar{L} \neq \varnothing \quad \forall v \in K^A \cap \bar{L}.$$

Множество L строится следующим образом. Полагаем $L_0 = S$ и последовательно находим множества белых и черных критических вершин X_1, Y_1, $X_2, Y_2, \ldots$ по правилу: пусть уже определены все эти множества до X_i и Y_i включительно, и пусть $L_i = S \cup X_1 \cup Y_1 \cup \ldots \cup X_i \cup Y_i$; тогда

$$X_{i+1} = \{v \in K^A - L_i : \mathrm{VEXT}(c, v) \subseteq L_i\},$$
$$Y_{i+1} = \{v \in K^B - L_i : \mathrm{VEXT}(c, v) \cap L_i \neq \varnothing\}.$$

Продолжаем процесс до тех пор, пока очередные множества X_{r+1} и Y_{r+1} не окажутся оба пустыми. Окончательно полагаем $L = L_r$.

Замечание. Если представить, что из сети удалены все некритические ребра, исходящие из критических вершин, то множество L получается добавлением к

S тех критических вершин, из которых Черные обеспечивают форсированный выход в S.

Шаг 2. Проверяется, является ли разбиение $(L, \bar{L})$ правильным для сети (G, A, B, c) с текущей функцией c. Для этого выделяются множества ребер

$$E_1=E(L^A, \bar{L}) \text{ и } E_2=E(\bar{L}^B, L),$$

а также множества вершин

$$\hat{S}=\{v\in S^B : \mathrm{VEXT}(c, v)\subseteq\bar{L}\}, \qquad \hat{T}=\{v\in T^A : \mathrm{VEXT}(c, v)\subseteq L\}.$$

Если все эти четыре множества пусты, вспомогательный алгоритм заканчивается на случае В) и $(L, \bar{L})$ — искомое правильное разбиение вершин сети.

Шаг 3. Текущая функция c сдвигается относительно помеченного множества L на положительную величину δ. Число δ выбирается максимальным не нарушающим свойства монотонности и определяется следующим образом: $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, где

$$\delta_1=\min\{p-c(vu) : vu\in E_1\}, \qquad \delta_2=\min\{c(vu)-p : vu\in E_2\},$$

$$\delta_3=\min\{p-\mathrm{ext}(c, v) : v\in\hat{S}\}, \qquad \delta_4=\min\{\mathrm{ext}(c, v)-p : v\in\hat{T}\},$$

причем, как обычно, минимум по пустому множеству считается равным $+\infty$. Отметим, что свойства А) — В) помеченного множества гарантируют строгую положительность величины сдвига δ.

На этом итерация заканчивается. Если для новой функции оказывается $m(G, A, B, c')\geqslant p$ или $M(G, A, B, c')\leqslant p$ (в силу свойства монотонности, такие неравенства могут выполняться только как равенства), вспомогательный алгоритм останавливается на случаях А) или Б). Иначе переходим к следующей итерации, и т. д. При окончании алгоритма текущая функция c и есть c', выдаваемая на выход вспомогательного алгоритма.

Докажем конечность числа итераций вспомогательного алгоритма. Пусть на j-й итерации имелись множества S и T недостаточных и избыточных вершин и были построены на шаге 1 множества критических вершин $X_1, Y_1, \ldots, X_r, Y_r$, где r — минимальный номер, при котором оба множества, X_{r+1} и Y_{r+1}, пусты. Будем ассоциировать с этой итерацией последовательность целых чисел $q(j)=\gamma, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r$, где $\gamma=|S|+|T|$ и $\alpha_i=|X_i|$, $\beta_i=-|Y_i|$ при $i=1, 2, \ldots, r$. Конечность числа итераций вытекает из следующего утверждения.

Лемма. *Пусть* $q(j)=\gamma, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_r, \beta_r$ *и* $q(j+1)=\gamma', \alpha_1', \beta_1', \ldots, \alpha_{r'}', \beta_{r'}'$ — *последовательности, ассоциированные с двумя идущими подряд итерациями с номерами* j *и* $j+1$. *Тогда* $q(j+1)$ *лексикографически меньше* $q(j)$.

Доказательство. Условимся обозначать объекты на $(j+1)$-й итерации со штрихами, а на j-й итерации — без штрихов. Рассмотрим упорядоченные семейства множеств $\mathcal{F}=(S\cup T, X_1, Y_1, \ldots, X_r, Y_r)$ и $\mathcal{F}'=(S'\cup T', X_1', Y_1', \ldots, X_{r'}', Y_{r'}')$ на j-й и $(j+1)$-й итерациях.

1. Покажем, что $\mathcal{F}'$ не совпадает с $\mathcal{F}$. Допустим, что это не так. Для функции c' на $(j+1)$-й итерации по определению числа δ имеет место по крайней мере одна из следующих ситуаций:

а) $c'(vu)=p$ для некоторых $v\in L^A$ и $u\in\bar{L}$,

б) $c'(vu)=p$ для некоторых $v\in\bar{L}^B$ и $u\in L$,

в) $\mathrm{ext}(c', v)=p$ для некоторой $v\in\hat{S}$,

г) $\mathrm{ext}(c', v)=p$ для некоторой $v\in\hat{T}$.

Это приводит к противоречию с $\mathscr{F}=\mathscr{F}'$. Действительно, из $\mathscr{F}=\mathscr{F}'$ следует $L=L'$, но тогда в случаях а) и в) вершина v не может быть в L', а в случаях б) и г) — в $\bar{L}'$.

2. Возьмем ближайшее от начала множество Z в $\mathscr{F}$, отличающееся от множества Z' с тем же порядковым номером в $\mathscr{F}'$ (если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ содержат разное число множеств, пополним меньшее из них пустыми множествами в количестве $||\mathscr{F}|-|\mathscr{F}'||$). Возможны три случая.

Случай 1: $Z=S\cup T$. Согласно свойству монотонности, множества S и T при переходе к следующей итерации могут только уменьшаться. Следовательно, $\gamma'<\gamma$, и лемма верна.

Случай 2: $Z=X_i$, $i\geqslant 1$. Покажем, что имеет место строгое включение $X_i'\subset X_i$, откуда будет следовать утверждение леммы $\alpha_i'<\alpha_i$. Предположим противное, и пусть имеется вершина $v\in X_i'-X_i$. Прежде всего $v\notin S\cup T$, иначе было бы $S'\cup T'\neq S\cup T$ вопреки выбору X_i. Таким образом, $v\in K^A$. Пусть $L_{i-1}=S\cup X_1\cup Y_1\cup\ldots\cup X_{i-1}\cup Y_{i-1}$, и пусть L_{i-1}' — аналогичное множество на $(j+1)$-й итерации; по условию выбора X_i имеем $L_{i-1}=L_{i-1}'$. Из $v\notin X_i\cup L_{i-1}$ и $v\in X_i'$ следует $\mathrm{VEXT}(c, v)\not\subseteq L_{i-1}$ и $\mathrm{VEXT}(c', v)\subseteq L_{i-1}$. Тогда должно найтись ребро vu, критическое при функции c и некритическое при c':

$$c(vu)=\mathrm{ext}(c, v)=p \text{ и } c'(vu)<\mathrm{ext}(c', v)=p.$$

Поскольку c' — сдвиг c относительно L на положительное δ, из последних условий имеем $v\in\bar{L}$ и $u\in L$. В силу свойства 3) (см. шаг 1), принадлежность v множеству $K^A\cap\bar{L}$ означает наличие критического ребра vu' с концом u' из $\bar{L}$. Но если $v\in\bar{L}$ и $u'\in\bar{L}$, то $c'(vu')=c(vu')=p$ и, значит, $u'\in\mathrm{VEXT}(c', v)$, что противоречит $\mathrm{VEXT}(c', v)\in L_{i-1}\in L$.

Случай 3: $Z=Y_i$, $i\geqslant 1$. Покажем, что $Y_i\subset Y_i'$ и $\beta_i>\beta_i'$. Действительно, из $v\in Y_i$ следует $\mathrm{VEXT}(c, v)\cap L_{i-2}=\varnothing$ и $\mathrm{VEXT}(c, v)\cap(X_{i-1}\cup Y_{i-1})\neq\varnothing$. Согласно выбору Y_i имеем $L_{i-2}=L_{i-2}'$, а также $X_{i-2}\cup Y_{i-2}=X_{i-2}'\cup Y_{i-2}'$. Поскольку для критической вершины $v\in Y_i\subseteq K^B\cap L$ в результате положительного δ-сдвига некритические ребра не могут превращаться в критические, имеем $\mathrm{VEXT}(c', v)\cap L_{i-2}'=\varnothing$. Поскольку, кроме того, ребра с обоими концами из L при сдвиге не меняют своей стоимости, по-прежнему $\mathrm{VEXT}(c', v)\cap(X_{i-1}'\cup Y_{i-1}')\neq\varnothing$, что означает $v\in Y_i'$.

Лемма, а вместе с ней и конечность числа итераций вспомогательного алгоритма доказаны. Отметим, что каждая итерация вспомогательного алгоритма может быть выполнена за $O(n^2)$ операций.

§ 3. Доказательство теоремы и алгоритм приведения сети к каноническому виду

Как уже упоминалось, если при работе вспомогательного алгоритма осуществляется случай В), т. е. находится правильное разбиение $(L, \bar{L})=(V', V'')$ игровой сети, то для доказательства теоремы 1 достаточно установить ее справедливость отдельно для каждого из эргодических блоков V' и V''. Поэтому будем считать, что случай В) не осуществляется. Неоднократным применением вспомогательного алгоритма можно тогда найти потенциальное преобразование $c\xrightarrow{\varepsilon}c'$ платежной функции игровой сети, в результате которого интервал $[m', M']$ вариации величины

$\mathrm{ext}(c', v)$ на сети станет сколь угодно малым. Покажем, что этого же всегда можно добиться и с помощью ограниченного потенциального преобразования

$$\|\varepsilon\|_\infty \leqslant 2(n-1)\|c\|_\infty, \tag{3}$$

где c — функция стоимости ребер в исходной сети. Действительно, условие $\mathrm{ext}(c', v) \in [m', M']$ можно при известных множествах вершин $\mathrm{VEXT}(c', v)$ записать в виде совместной системы линейных неравенств:

$$\begin{aligned} &m' \leqslant c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u) \leqslant M' && \text{для } v \in V \text{ и } u \in \mathrm{VEXT}(c', v), \\ &c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u) \leqslant M' && \text{для } v \in A \text{ и } u \in V(v), \\ &m' \leqslant c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u) && \text{для } v \in B \text{ и } u \in V(v) \end{aligned} \tag{4}$$

относительно $n=|V|$ неизвестных потенциалов, один из которых можно положить равным нулю. Эта система имеет вполне унимодулярную матрицу ограничений и правые части, по модулю не превосходящие $2\|c\|_\infty$, откуда следует, что у нее существует решение $\varepsilon(v)$, $v \in V$, каждая компонента которого по модулю не превосходит $2(n-1)\|c\|_\infty$. Утверждение 1 теоремы теперь следует из предельного перехода $M'-m' \to 0$ с учетом компактности куба (3), что завершает ее доказательство.

Если платежная функция c исходной сети является целочисленной, то для нахождения потенциального преобразования $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$, приводящего сеть к каноническому виду, достаточно добиться с помощью вспомогательного алгоритма ситуации, когда разность $M'-m'$ в эргодических блоках не превосходит $1/(2n^2)$. В самом деле, каждое из чисел $p(v)$ равно среднему значению стоимости c по ребрам некоторого простого цикла и поэтому является рациональным числом со знаменателем не больше n. Следовательно, если $M'-m' < 1/(2n^2)$, величины $p(v)$ можно найти с помощью цепных дробей. Далее, из совместности системы (4) в каждом блоке вытекает совместность системы

$$\begin{aligned} &c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u)=p(v) && \text{для } v \in V \text{ и } u \in \mathrm{VEXT}(c', v), \\ &c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u) \leqslant p(v) && \text{для } v \in A \text{ и } u \in V(v), \\ &p(v) \leqslant c(vu)+\varepsilon(v)-\varepsilon(u) && \text{для } v \in B \text{ и } u \in V(v), \end{aligned}$$

причем ее решение может быть найдено по уже определенному вспомогательным алгоритмом и не обязательно принадлежащему кубу (3) решению системы (4) с затратой порядка n^3 операций (см., например, [7]). Таким образом, в целочисленном случае число действий алгоритма приведения игровой сети к каноническому виду не превосходит по порядку величину $In^2 \log(n\|c\|_\infty)+n^3$, где I — число итераций вспомогательного алгоритма.

Экспериментальное изучение вспомогательного алгоритма, проведенное В. Н. Лебедевым, показало, что в большинстве случаев количество I его итераций не превосходит более чем в несколько раз число n вершин сети, что позволило успешно применять его в игровых сетях с сотнями позиций. С этим практическим поведением, однако, контрастирует указанный Лебедевым пример игровой сети, в которой число итераций вспомогательного алгоритма составляет $2^{n/2-1}+1$,— ситуация, до некоторой степени схожая с поведением симплекс-метода. В связи с этим естественно возникает вопрос о существовании полиномиального по n и $\log\|c\|_\infty$

алгоритма приведения игровой сети с целочисленной платежной функцией к каноническому виду. Используя решение «обрезанных» игр на конечных интервалах времени с помощью динамического программирования, а также технику «поразрядного сокращения невязок», такой полиномиальный алгоритм можно действительно построить. Его изложение, однако, выходит за рамки настоящей статьи.

Литература

1. *Karp R. M.* A characterization of the minimum cycle mean in a digraph // Discrete Math. 1978. V. 23. № 3. P. 309–311.
2. *Карзанов А. В.* О минимальных по среднему весу разрезах и циклах ориентированного графа // Качественные и приближенные методы исследования операторных ур-ний, Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1985. С. 72–83.
3. *Moulin H.* Prolongement des jeux à deux joueurs de somme nulle // Bull. Soc. math. France. 1976. Mem. 45.
4. *Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. Гл. X.
5. *Гурвич В. А.* Разрешимость позиционных игр в чистых стратегиях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 2. С. 358–371.
6. *Ховард Р. А.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964.
7. *Хачиян Л. Г.* О точном решении систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 4. С. 999–1002.

Поступила в редакцию 14.XI.1987