Цена 28 коп.

ВНИИ
СИСТЕМНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Е. А. ДИНИЦ,
А. В. КАРЗАНОВ

БУЛЕВА ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ОДНОГО ЗНАКА

ПРЕПРИНТ

МОСКВА
1978

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается следующий класс задач булевого программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \min;$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geqslant A_j,\ j = 1, 2, \dots, m;$$

$$x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, 2, \dots, n,$$

при $a_{ji} \geqslant 0$.

Основное внимание уделяется задачам с двумя ограничениями ($m = 2$). Приведем две наглядные интерпретации таких задач.

А. Имеется n банкнот двойного достоинства, i-я банкнота стоит a_i долларов и b_i франков. Требуется выбрать наименьшее количество банкнот так, чтобы их суммарная стоимость по долларам была не менее A и по франкам не менее B (эта первоначальная постановка задачи принадлежит А.С. Кронроду).

Б. Пусть требуется разыскать по телефону двух людей, причем известны вероятности a_i и b_i их нахождения по каждому (i-му) из n телефонных номеров ($\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$). Каков минимальный список телефонных номеров, гарантирующий вероятность $1 - \varepsilon_1$ отыскания первого человека и $1 - \varepsilon_2$ – второго?

Задача минимизации при ограничениях $\geqslant$ эквивалентна соответствующей задаче максимизации при ограничениях $\leqslant$; переход от задачи одного типа к задаче другого – осуществляется заменой переменных $y_i = 1 - x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Пример задачи второго типа: уместить максимальное количество единиц груза при ограничениях сверху на суммарный вес и объем (эквивалентно: оставить минимальное количество единиц груза при ограничениях по весу и объему).

При анализе данного класса задач и изложении методов их решения нам будет удобно пользоваться содержательной терминологией; в дальнейшем мы будет придерживаться формулировки *А* и называть рассматриваемые задачи – <u>задачами о банкнотах.</u>

В работе содержатся следующие результаты.

1. Предлагается алгоритм комбинаторного характера, решающий задачу о банкнотах при $m = 2$ с возможной неоптимальностью равной единице. Оценка трудоемкости алгоритма – $O(n^2 \cdot \log_2 n)$ (имеются в виду действия абстрактной ЭВМ [1] (§§ 1–3).

2. Доказана универсальность в классе переборных задач [2] задачи о банкнотах при $m = 2$, в которой требуется найти точное решение (§§4).

3. Предложен алгоритм решения задачи при $m = 2$ с возможной неоптимальностью равной единице, использующий решение соответствующей линейной "непрерывной" задачи. В этом алгоритме сочетается вариант прямо-двойственного метода линейного программирования с комбинаторной техникой преобразования двойственных планов. Оценка трудоемкости алгоритма – $O(n^2)$. В алгоритм как составная часть входит процедура решения следующей задачи: на плоскости имеется n прямых, для каждой прямой требуется упорядочить точки пересечения ее с другими прямыми; предлагаемая процедура, дающая, кроме того, полную локальную информацию о сетке прямых, имеет непонижаемую для данной задачи оценку трудоемкости – $O(n^2)$ (§§ 5–7).

4. Для задачи о банкнотах при произвольном m приведена схема алгоритма получения квазиоптимального решения с возможной неоптимальностью не свыше $m - 1$. Алгоритм базируется на прямо-двойственном методе линейного программирования и имеет оценку трудоемкости – $O((mn + m^2 2^{2m})(m + n)^m)$ (§§8).

§ 1. Аппарат двойственности для задачи о банкнотах двойного достоинства

Ясно, как решать задачу о банкнотах с одним ограничением (по долларам): следует брать самые дорогие банкноты, пока не наберется достаточное количество долларов. Оказывается, существует аналог этого способа и при двух ограничениях (и более см. § 8).

Введем переменные α и β*. Скажем, что задан *обменный курс* $\alpha : \beta$ доллара и франка, если фиксированы значения $\alpha, \beta \geqslant 0$ – веса доллара и франка. Стоимостью i-й банкноты будем считать величину

$$c_i = c_i(\alpha, \beta) = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i.$$

Теорема 1. Существует такой обменный курс $\tilde{\alpha} : \tilde{\beta}$ доллара и франка (зависящий от $\bar{a} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, A и B), что некоторая квазиоптимальная выборка (т.е. выборка с возможной неоптимальностью равной единице) состоит из самых дорогих по этому обменному курсу банкнот** (справедливость теоремы следует из данного ниже алгоритма).

Будем называть выборкой подмножество банкнот, а также множество соответствующих им номеров $I \in [1; n]$. Обозначим $c(I) = \sum_{i=1}^{n} c_i$. Выборка называется допустимой по первому ограничению (по долларам) или по второму ограничению (по франкам), если $\sum_{i \in I} a_i \geqslant A$ (соответственно, $\sum_{i \in I} b_i \geqslant B$). В дальнейшем будем опираться

---

*Переменные α и β имеют смысл двойственных переменных для "непрерывного" аналога задачи о банкнотах (§ 5).

**Здесь и далее в аналогичных случаях имеется в виду нестрогий порядок: стоимости i-й выбранной и j-й невыбранной банкнот должны быть связаны знаком $\geqslant$, например: $c_i \geqslant c_j$. Ниже дано уточнение теоремы, связанное со случаем равенства стоимостей некоторых выбранных и невыбранных банкнот (§ 3).

на следующие факты, непосредственно вытекающие из неотрицательности a_i, b_i, α, β.

Лемма 1. (О монотонности). Пусть I и I' – две выборки и $I' \supset I$.

1. Если выборка I допустима по некоторому ограничению, то выборка I' также допустима по нему;

2. $c(I') \geqslant c(I)$.

Оптимальность и квазиоптимальность выборок, строящихся ниже, основаны на следующих оценках.

Лемма 2. (Об оценке оптимума снизу). Пусть выборка I, недопустимая ни по долларам, ни по франкам, состоит из k банкнот, самых дорогих при некотором обменном курсе $\alpha : \beta$. Тогда оптимум задачи не меньше $k+1$.

Доказательство. Из недопустимости выборки I следует, что

$$c(I) = \sum_{i \in I} (\alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i) = \alpha \sum_{i \in I} a_i + \beta \sum_{i \in I} b_i < \alpha \cdot A + \beta \cdot B.$$

По условию и лемме о монотонности $c(I)$ максимально по всем выборкам из k или менее банкнот, т.е. для любой выборки I', $|I'| \leqslant k$, также имеем

$$c(I') < \alpha \cdot A + \beta \cdot B.$$

С другой стороны, для любой допустимой выборки I'' имеем

$$c(I'') = \alpha \cdot \sum_{i \in I''} a_i + \beta \cdot \sum_{i \in I''} b_i \geqslant \alpha \cdot A + \beta \cdot B.$$

Это и доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть выборка I, недопустимая по долларам (франкам), состоит из k банкнот, самых дорогих по долларам (франкам) (т.е. при обменном курсе 1:0 (0:1)). Тогда оптимум задачи не меньше $k + 1$.

Доказывается так же, как лемма 2.

Назовем величину $\beta(i, j) = (a_i - a_j)/(b_j - b_i)$, $b_i < b_j$, ij-й гранью для задачи о банкнотах. Отметим, что при $\beta_{ij} > 0$ верно $a_i > a_j$.

Лемма 3. (Об изменении попарного порядка). Пусть $\alpha = 1$, а β изменяется от 0 до ∞. Обозначим произвольную пару банкнот как (a_i, b_i) и (a_j, b_j), причем $b_i \leqslant b_j$. Тогда верно следующее:

а) если $b_i < b_j$ то i–я банкнота всегда дороже j–й, пока $\beta < \beta(i, j)$, а j–я дороже i–й, как только $\beta > \beta(i, j)$;

б) если $b_i = b_j$, то порядок, связывающий стоимости c_i и c_j, фиксированный.

Справедливость утверждения леммы проверяется непосредственным сравнением величин $c_i = \alpha \cdot a_i + \beta \cdot b_i$ и $c_j = \alpha \cdot a_j + \beta \cdot b_j$.

Задачу о банкнотах будем называть вырожденной, если существует такой обменный курс $\alpha : \beta$, $\alpha, \beta > 0$, при котором совпадают стоимости некоторых трех банкнот.

Дадим геометрическую интерпретацию. На рисунке 1 прямые есть графические изображения зависимостей $c_i(\beta) = b_i\beta + a_i$. Абсцисса точки пересечения i–й и j–й прямых есть ij–я грань $\beta(i, j)$. Задача о банкнотах невырождена, если никакие три прямые не пересекаются в одной точке положительного квадранта.

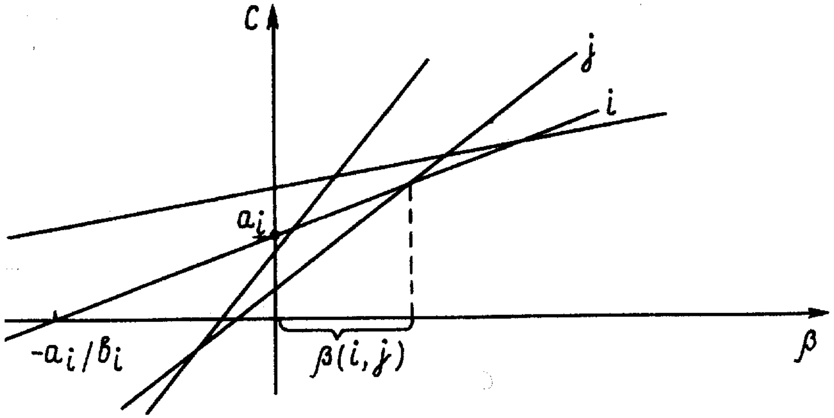

Рис. 1

§ 2. Комбинаторный алгоритм

Дадим вначале описание алгоритма для невырожденного случая. В любой момент алгоритма будут определены веса $\alpha = 1$ и $\beta \geqslant 0$, а также упорядочение банкнот "по старшинству" $i_1, i_2, \ldots, i_n$, $i_r = i_r(\beta)$, не противоречащее их упорядочению по убыванию стоимости.

Алгоритм

Начальная часть. Положим $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Упорядочим банкноты по их стоимости в долларах, а при равной стоимости в долларах–по стоимости во франках. Будем выбирать старшие банкноты до тех пор, пока выборка I из k_0 старших банкнот не удовлетворит потребность в долларах: $\Sigma_a = \sum\limits_{i \in I} a_i \geqslant A$ (заметим, что по лемме 2 величина k_0 – оценка снизу для оптимума). Если $\Sigma_b = \sum\limits_{i \in I} b_i \geqslant B$, то I – оптимальная выборка. Если же это соотношение не выполнено (рис. 2), то переходим к итеративной части алгоритма, предварительно сформировав массив транспозиций (МТ) по следующим правилам.

Вычислим значение граней $\beta(i, j)$ для всех пар i, j, таких, что $b_i < b_j$ и $a_i > a_j$ ($\Leftrightarrow \beta(i, j) > 0$). Упорядочим

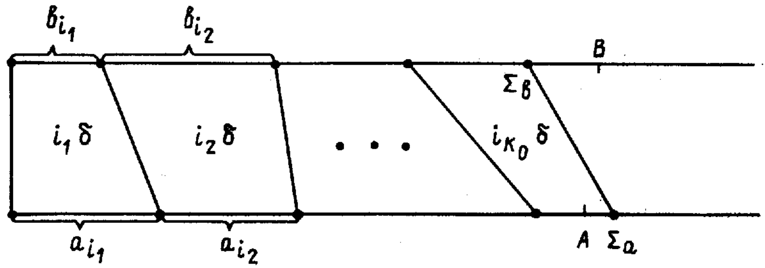

Рис. 2

эти числа. Элементом массива транспозиций будет грань $\beta(i, j)$ вместе с номерами i и j, а расположение этих элементов в массиве определяется (нестрогим) возрастанием значений $\beta(i, j)$.

Итеративная часть. Перед каждой итерацией определены веса $\alpha = 1$ и β и упорядочение банкнот, а также имеется выборка I, состоящая из k старших банкнот. Выполняются условия: $\Sigma_a \geqslant A$, $\Sigma_b < B$, а если из выборки I убрать младшую (i_k-ю) банкноту, то будет $\Sigma_a < A$ (см. рис. 2) (при этом по лемме 2 имеем оценку снизу k для оптимума задачи). Также известен очередной элемент массива транспозиций.

Итерация

Рассмотрим содержание $(\beta(i, j), i, j)$ очередного элемента МТ. Положим $\beta = \beta(i, j)$. Переставим в упорядочении банкноты i и j (j-я из младшей станет старшей). Возможны два случая.

1. $i, j \in I$ или $i, j \notin I$. Тогда выборку (как неупорядоченную) не изменяем.

2. $i = i_k \in I$, $j = i_{k+1} \notin I$. Исключим из выборки I i-ю банкноту, а j-ю включим в выборку (при этом Σ_a уменьшится, а Σ_b увеличится).

Возможны следующие четыре ситуации (рис. 3):

А. Полученная выборка I допустима по обоим ограничениям. Тогда I – оптимальная выборка (так как $|I| = k$ – оценка оптимума снизу).

Б. Полученная выборка I допустима только по франкам. Тогда добавим в выборку I i-ю банкноту (по лемме о монотонности выборка I станет допустимой по обоим ограничениям). Результирующая выборка I квазиоптимальна с неоптимальностью не более единицы (поскольку $|I| = k + 1$, а k – оценка снизу для оптимума).

В. Полученная выборка I допустима только по долларам (она имеет меньший дефицит по франкам, чем предыдущая, так как Σ_b увеличилось). Тогда переходим к окончанию итерации.

Г. Полученная выборка I недопустима по обоим ограничениям (тогда по лемме 2 оптимум оценивается

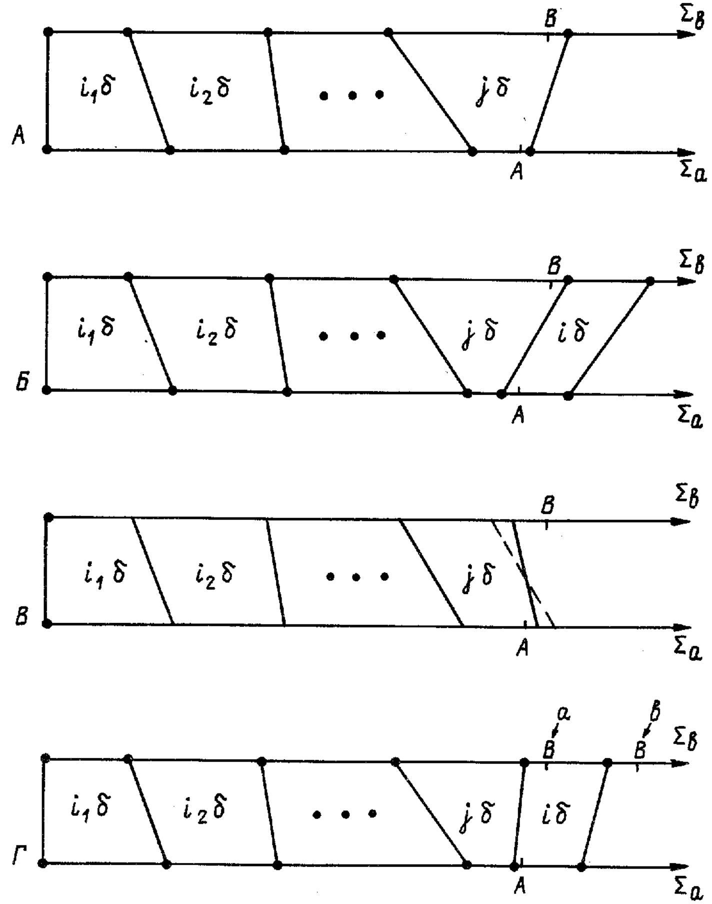

Рис. 3

снизу величиной $k + 1$). Добавляем в выборку i-ю банкноту, получая допустимую по долларам выборку (по лемме о монотонности). Возникает либо вариант *А*, либо вариант *В*, и мы поступаем, как положено для этих вариантов.

Окончание итерации. Полагаем очередным следующий элемент МТ, если он существует, и тогда переходим к следующей итерации. В противном случае заканчиваем итеративную часть и переходим к заключительной части.

Заключительная часть

Упорядочение по старшинству при имеющемся обменном курсе $1:\widetilde{\beta}$ является упорядочением по франкам (это следует из того, что при дальнейшем увеличении β от $\widetilde{\beta}$ до ∞ упорядочение уже не меняется в силу того, что нет пары $(i, j): \widetilde{\beta} < \beta(i, j)$, а при достаточно большом β упорядочение по $c_i = a_i + \beta \cdot b_i$ совпадает с упорядочением по b_i). Будем добавлять в выборку следующие по старшинству банкноты до тех пор, пока не удовлетворим потребность во франках. Полученная выборка будет оптимальной (по лемме 2 и лемме о монотонности). Описание алгоритма закончено.

Справедливость утверждения теоремы 1 следует из того, что в любой момент алгоритма банкноты упорядочены по их стоимости, а в выборку входят максимальные по этому упорядочению банкноты.

Оценим трудоемкость предлагаемого алгоритма.

1. Проведение начальной и заключительной частей алгоритма требует $O(n)$ действий.

2. При формировании массива транспозиций вся деятельность, кроме упорядочения чисел $\beta(i, j)$, требует по $O(1)$ действий для каждой рассматриваемой пары (i, j), т.е. всего $O(n^2)$ действий. Упорядочение $\sim\frac{n(n-1)}{2}$ чисел $\beta(i, j)$ требует $O(n^2 \cdot \log_2 n)$ действий.

3. Проведение каждой итерации требует $O(1)$ действий, а всего итераций $- \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Поэтому проведение итеративной части требует $O(n^2)$ действий.

Тем самым, трудоемкость всего алгоритма равна $O(n^2 \cdot \log_2 n)$ действий, причем вся деятельность, кроме упорядочения массива из $1/2 \cdot n(n-1)$ чисел, имеет трудоемкость $O(n^2)$ действий.

Дадим в общих чертах описание варианта алгоритма, работающего по методу "деления отрезка пополам". Начальная часть алгоритма остается той же. После нее проводится также "симметричная" деятельность (доллары и франки меняются ролями).

На первой итерации полагаем $\alpha = \beta = 1$ и пытаемся решить задачу, выбирая самые дорогие по обменному курсу 1:1 банкноты. Если это не удалось, то в зависимости от выполнения того или иного ограничения полагаем $\beta = 1/2$ или $\beta = 2$ и проводим аналогично вторую итерацию. Когда при $\beta = 2^{-l}$ $(\beta = 2^l)$ получаем допустимость по иному ограничению, чем на предыдущей итерации, то полагаем $\beta = 1{,}5 \cdot 2^{-l}$ $(\beta = 3/4 \cdot 2^l)$ и т.д., пока последовательные уточнения β не приведут к оптимальной выборке или выборке, которую можно превратить в допустимую (квазиоптимальную) добавлением одной банкноты, а именно, старшей среди невыбранных банкнот.

§ 3. Обобщение алгоритма на вырожденный случай

Рассмотрим сначала важный случай, когда вырожденность возникает только вследствие наличия среди банкнот одинаковых ($a_i = a_j$, $b_i = b_j$), но ни при каком обменном курсе никакие три неодинаковые банкноты не равны по стоимости.

Тогда на итерации алгоритма может потребоваться поменять местами в упорядочении две группы одинаковых банкнот, так что совокупность банкнот обеих групп частично принадлежит, а частично не принадлежит выборке. Единственный нетривиальный случай, когда при изменении упорядочения и соответствующем изменении выборки она стала допустимой по франкам. Тогда для нахождения (квази-) оптимальной выборки, очевидно, достаточно перебрать все варианты, когда в выборку входит один, два,..., все банкноты из первой группы и нужное количество банкнот из второй группы.

Переходим к общему случаю. Сначала дадим теоретическую разработку, а затем– практический вариант.

Нетрудно проверить, что задача о банкнотах невырождена, если все значения граней $\beta(i, j)$ различны и нет одинаковых банкнот. Построим для произвольной задачи о банкнотах эквивалентную ей невырожденную задачу. Легко видеть, что добавление достаточно малых величин ε_i к значениям a_i не влияет на ответ задачи. Пусть $a_{\pi(1)} \geqslant a_{\pi(2)} \geqslant \ldots \geqslant a_{\pi(n)}$. Тогда возьмем $\varepsilon_1 : 1 = \varepsilon_0 \gg \varepsilon_{\pi(1)} \gg \varepsilon_{\pi(2)} \gg \ldots \gg \varepsilon_{\pi(n)}$ и положим $a_i' = a_i + \varepsilon_i$. Для модифицированной задачи одинаковых банкнот нет и новые значения граней $\beta'(i, j) = \beta(i, j) + (\varepsilon_i - \varepsilon_j)/(b_j - b_i) \geqslant \beta(i, j)$ попарно неравны, как только все значения ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ попарно достаточно сильно различаются. Следовательно, эта задача невырождена. Получаем, что для решения исходной задачи достаточно построить модифицированную задачу и решить ее описанным выше алгоритмом.

Предложенный способ решения вырожденной задачи можно в сильной степени упростить, сделав алгоритм комбинаторным (в частности, значения ε_i вычислять не нужно).

1. Перестановку $\pi(i)$ следует взять соответствующей упорядочению банкнот в начальной части алгоритма.

2. При вычислении сумм $\Sigma_a' = \sum\limits_{i \in I} a_i'$ прибавки ε_i можно не учитывать: использование Σ_a вместо Σ_a' дает те же результаты.

3. Новые значения граней $\beta'(i, j)$ также вычислять не нужно. Вместо них можно пользоваться величинами $\beta(i, j)$. Составление массива транспозиций в соответствии с возрастанием значений $\beta'(i, j)$ можно проводить, пользуясь эквивалентным порядком, лексикографически определяемым числами:

1) $\beta(i, j)$; 2) $\pi^{-1}(i)$; 3) $-\pi^{-1}(j)$.

Таким образом, алгоритм для общего случая отличается от алгоритма для невырожденных задач всего лишь несколько более тонким правилом составления последовательности элементов массива транспозиций. Нетрудно проверить, что оценки трудоемкости по порядку от такого усложнения не изменяются.

Уточнение теоремы 1 (дополнительное условие на квазиоптимальную выборку, существование которой гарантируется теоремой), если в выборку входит часть группы банкнот, равных между собой по стоимости, то эта часть состоит из некоторого количества банкнот с наибольшим (для этой группы) долларовым достоинством и некоторого количества – с наибольшим франковым достоинством.

Чтобы доказать уточненный вариант теоремы 1, достаточно проследить, как изменяется выборка I в ходе работы алгоритма. Разобьем алгоритм на части, соответствующие фиксированным значениям β (являющимся гранями задачи). Выделим произвольную часть алгоритма (далее будем называть ее ВЧА) и докажем, что в ее пределах выборка всегда удовлетворяет сформулированному выше условию.

Легко вывести из леммы об изменении попарного порядка, что в начале ВЧА банкноты в каждой группе равных по стоимости упорядочены по возрастанию $\pi^{-1}(i)$ (тем самым, по убыванию долларового достоинства), а в конце ВЧА – в противоположном порядке (тем самым, по убыванию франкового достоинства).

Утверждение: а) если в начале ВЧА некоторая группа целиком принадлежала или целиком не принадлежала выборке, то эта ситуация сохраняется в ходе ВЧА;

б) если граница выборки (в массиве банкнот, упорядоченном по старшинству) в начале ВЧА разделяла некоторую группу ("граничную"), то в ходе ВЧА граница выборки либо разделяет эту группу, либо проходит непосредственно за ее последним элементом.

Доказательство можно провести от противного, опираясь на лемму о монотонности.

Пользуясь утверждением, можно укрупнить шаги ВЧА. Можно сразу в начале ВЧА переставить в противоположном порядке банкноты в каждой группе, кроме граничной, и выборку при этом не менять, а затем уже проводить "осторожные" перестановки в граничной группе (в порядке, диктуемом указанной выше лексикографией), соответственно изменяя выборку.

Непосредственная проверка показывает, что последовательность перестановок в группе следующая: сначала предпоследняя (по старшинству) банкнота группы переставляется с последней, затем третья с конца переставляется с предпоследней и последней, переходя на последнее место, и т.д., пока, наконец, старшая банкнота группы, последовательно переставляясь с остальными, не станет младшей. Отсюда вытекает, что в любой момент ВЧА старшинство банкнот в граничной группе имеет следующий вид: сначала идет подгруппа из некоторого количества банкнот с минимальными значениями $\pi^{-1}(i)$ в порядке возрастания $\pi^{-1}(i)$, а затем – остальные банкноты в порядке убывания $\pi^{-1}(i)$, причем, быть может, одна банкнота, непосредственно следующая по значению $\pi^{-1}(i)$ за банкнотами первой подгруппы, нарушает порядок второй подгруппы, располагаясь не в конце ее, а в другом месте. Так как выборка всегда состоит из старших банкнот, то отсюда непосредственно следует справедливость уточненного варианта теоремы 1.

§ 4. Универсальность задачи о банкнотах

Дадим способ сведения к серии задач о банкнотах следующей задачи "о камнях": даны n камней с весами w_i, $i = 1, 2, \dots, n$; требуется выяснить, существует ли подмножество камней с суммарным весом w_0.

Для того чтобы решить поставленную задачу, достаточно решить n вспомогательных задач (ВЗ), k–я из которых ($k = 1, 2, \dots, n$) отличается от исходной тем, что априори фиксируется количество k камней в требуемой выборке.

Построим задачу о банкнотах, эквивалентную k–й вспомогательной задаче о камнях. Пусть $W = \max w_i$. Положим $a_i = w_i$, $b_i = W - w_i$, $A = w_0$, $B = kW - w_0$. Для любой допустимой выборки I имеем

$$kW = A + B \leqslant \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I} (a_i + b_i) = |I| \cdot W,$$

т.е. $|I| \geqslant k$, причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда при $|I| = k$ $\sum_{i\in I} a_i = A$,

т.е. $\sum_{i\in I} w_i = w_0$ (тогда и $\sum_{i\in I} b_i = B$). Отсюда имеем, что если k–я ВЗ имеет положительный ответ, то оптимум построенной задачи о банкнотах равен k и ее ответ определяет требуемое подмножество в задаче о камнях; если же k–я ВЗ имеет отрицательный ответ, то оптимум задачи о банкнотах больше k. Таким образом, решение k–й ВЗ эквивалентно решению построенной задачи о банкнотах.

Тем самым универсальная задача "о камнях" (см. работу [3]) сведена к задаче о банкнотах, откуда последняя – универсальна.

Замечание. Предложенный выше алгоритм приближенного решения задачи о банкнотах вместе с описанным здесь сведением не дает приближенного алгоритма решения задачи о камнях.

§ 5. Линейная программа для задачи о банкнотах

Поставим в соответствие i–й банкноте переменную x_i принимающую значение 1, если банкнота участвует в выборке, и 0 – в противном случае. Тогда задача об оптимальном выборе банкнот записывается как задача $\mathscr{X}$ Ц целочисленного программирования

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant A, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \geqslant B, \qquad (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \; i = 1, 2, \dots, n, \qquad (3)$$

$$L(\mathscr{X}) = \sum x_i \to \min$$

(все стоимости банкнот a_i считаются неотрицательными).

Рассмотрим задачу $\mathscr{X}$ линейного программирования, получающуюся из $\mathscr{X}$ Ц при замене условия (3) на условия (3′) и (4):

$$-x_i \geqslant -1, \; i = 1, 2, \dots, n, \qquad (3')$$

$$x_i \geqslant 0. \tag{4}$$

Пусть $\mathscr{x}^{Ц}$ – оптимальное решение задачи $\mathscr{X}^{Ц}$, а $\mathscr{x}$ – оптимальное решение задачи $\mathscr{X}$. Очевидно

$$L(\mathscr{x}^{Ц}) \geqslant]L(\mathscr{x})[, \tag{5}$$

где $]a[$ означает ближайшее целое, не меньшее a.

Ниже будет описан алгоритм решения задачи $\mathscr{X}$, при этом в найденном оптимальном решении не более двух переменных будут иметь нецелочисленные значения. Пусть вектор $]\mathscr{x}[$ получается из $\mathscr{x}$ округлением значений переменных до ближайшего целого сверху.

Лемма 4. Если в оптимальном решении $\mathscr{x}$ задачи $\mathscr{X}$ среди значений переменных не более одного нецелого, то

$$L(\mathscr{x}^{Ц}) = L(]\mathscr{x}[),$$

а если их число равно двум, то

$$L(\mathscr{x}^{Ц}) \geqslant L(]\mathscr{x}[) - 1,$$

т.е. $]\mathscr{x}[$ либо точное решение задачи о банкнотах, либо отличающееся от точного по значению целевой функции на 1*.

Доказательство. Обозначим $\gamma(\mathscr{x})$ совокупность переменных в $\mathscr{x}$, имеющих нецелые значения, тогда

$$L(]\mathscr{x}[) = L(\mathscr{x}) - \sum_{x_i \in \gamma(\mathscr{x})} x_i + |\gamma(\mathscr{x})|,$$

откуда, учитывая соотношение (5),

$$L(\mathscr{x}^{Ц}) \geqslant]L(\mathscr{x})[=]L(]\mathscr{x}[) + \sum_{x_i \in \gamma(\mathscr{x})} x_i - |\gamma(\mathscr{x})|[=$$

$$= L(]\mathscr{x}[) +]\sum_{x_i \in \gamma(\mathscr{x})} x_i - |\gamma(\mathscr{x})|[.$$

*Заметим, что $]\mathscr{x}[$ в силу неотрицательности a_i и b_i подчиняется неравенствам (1) и (2).

Если $|\gamma(\mathscr{x})| \leqslant 1$, то

$$]\sum_{x_i \in \gamma(\mathscr{x})} x_i - |\gamma(\mathscr{x})|[= 0,$$

если же $|\gamma(\mathscr{x})| = 2$, то

$$]\sum_{x_i \in \gamma(\mathscr{x})} x_i - |\gamma(\mathscr{x})|[\geqslant -1.$$

Лемма доказана.

Сопоставим условию (1) двойственную переменную λ_1, условию (2) – переменную λ_2, а i-му условию (3′) – переменную μ_iˣ. Двойственная к $\mathscr{X}$ задача линейного программирования $\mathscr{X}^*$ имеет вид:

$$a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 - \mu_i \leqslant 1, \tag{6}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$L^*(\lambda_1, \lambda_2, \mu) = A\lambda_1 + B\lambda_2 - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \to \max.$$

Пусть λ_1, λ_2 – неотрицательные действительные числа. Для каждого i определим μ_i по формуле

$$\mu_i = \max\{0, a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 - 1\}. \tag{7}$$

Полученный вектор $\{\lambda_1, \lambda_2, \mu\}$ удовлетворяет ограничениям (6), т.е. является планом задачи $\mathscr{X}^*$. Очевидно среди всех планов задачи $\mathscr{X}^*$ с фиксированными λ_1 и λ_2 план с μ, определенным согласно формуле (7), максимизирует $\mathscr{X}^*$. В дальнейшем мы будем иметь дело только с планами, подчиняющимися формуле (7). Тем самым план будет задаваться вектором $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Частичным планом задачи $\mathscr{X}$ назовем вектор $\mathscr{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geqslant 0$, удовлетворяющий условию (3′) (условия (1) и (2) могут не выполняться). Введем величины

$$\Delta_1(\mathscr{x}) = A - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

ˣλ_1 и λ_2 – аналоги весов α и β, использовавшихся выше.

$$\Delta_2(\mathscr{x}) = B - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

– первая и вторая *невязки* частичного плана $\mathscr{x}$.

Пусть план $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ задачи $\mathscr{L}^*$ и частичный план $\mathscr{x}$ подчиняются соотношениям:

$$\Delta_1(\mathscr{x}) < 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \tag{8}$$

$$\Delta_2(\mathscr{x}) < 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0, \tag{9}$$

$$a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 < 1 \Rightarrow x_i = 0, \tag{10}$$

$$a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 > 1 \Rightarrow x_i = 1. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что (8)–(11) являются соотношениями дополняющей нежесткости линейного программирования для задач $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^*$. По известной теореме о дополняющей нежесткости, если $\mathscr{x}$ – план задачи $\mathscr{L}$ (т.е. если $\Delta_1(\mathscr{x}) \leqslant 0$, $\Delta_2(\mathscr{x}) \leqslant 0$) и для $\mathscr{x}$ и $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ выполняются соотношения дополняющей нежесткости, то $L(\mathscr{x}) = L^*(\lambda_1, \lambda_2)$, т.е. эти планы оптимальны.

Рассмотрим плоскость $R^2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Каждой точке положительного квадранта этой плоскости взаимно-однозначно соответствует план задачи $\mathscr{L}^*$ (μ определяются согласно (7)). Пусть P_i – прямая, удовлетворяющая уравнению

$$a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 = 1. \tag{12}$$

Прямые $P_1, P_2, \ldots, P_n$ назовем *выделенными*. На прямой P_i задается направление в сторону увеличения λ_2, если $a_i > 0$, и направление в сторону уменьшения λ_1, если $a_i = 0$.

Пусть фиксирован план $\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Прямая P_i называется *допустимой*, если при этих λ_1, λ_2 верно равенство (12). Переменную x_i назовем допустимой, если допустима прямая P_i, и недопустимой – в противном случае. Если дан план $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, то для частичного плана $\mathscr{x}$, удовлетворяющего соотношениям дополняющей нежесткости (8)–(11), x_i определяется однозначно (принимает

значение 0 или 1), если x_i недопустимо, и может быть произвольным (в отрезке $[0,1]$, если x_i допустимо).

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться следующей очевидной геометрической леммой.

Лемма 5. Пусть $\tilde{\lambda}_1 \geqslant 0$, $\tilde{\lambda}_2 \geqslant 0$ и $\mathscr{x}$ – частичный план. Тогда выполнение соотношений (10), (11) эквивалентно следующему: для каждой выделенной прямой P_i, не содержащей точки $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$, справедливо $x_i = 0$, если P_i не разделяет точки $(0,0)$ и $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$; и $x_i = 1$, если разделяет[x].

Доказательство следует из того, что на полуплоскости, отделяемой прямой P_i, в которой лежит точка $(0,0)$, выполняется $a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 < 1$, а на другой полуплоскости – $a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2 > 1$.

Назовем задачу $\mathscr{L}^*$ невырожденной, если через одну точку строго положительного квадранта проходит не более двух, а через точку, лежащую на оси $\overline{O\lambda_1}$ или $\overline{O\lambda_2}$, – не более одной выделенной прямой[xx].

Алгоритм решения задачи $\mathscr{L}$, изложенный в следующем пункте, не предполагает невырожденности задачи $\mathscr{L}^*$.

§ 6. Алгоритм сокращения невязок

Для решения задачи $\mathscr{L}$ воспользуемся идеей метода сокращения невязок (прямо-двойственного метода). Алгоритм устроен итеративно. В каждый момент имеются некоторый план $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ задачи $\mathscr{L}^*$ и частичный план $\mathscr{x}$ задачи $\mathscr{L}$, удовлетворяющие условиям (8)–(11). Итерация состоит из двух частей: 1) пересчет плана $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ при фиксированном частичном плане $\mathscr{x}$ (переход в другую точку пересечения выделенных прямых между собой или с осями вдоль некоторой допустимой прямой либо оси); 2) преобразование частичного плана $\mathscr{x}$ при новом фиксированном плане $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ путем изменения значений допустимых переменных; при этом

---

[x] Прямая P_i очевидно не содержит точку $(0,0)$

[xx] Сравните с определением вырожденности, данным в § 1.

невязки не возрастают. В конце концов невязки $\Delta_1(\boldsymbol{x})$ и $\Delta_2(\boldsymbol{x})$ станут неположительными, т.е. будет найден план задачи $\mathscr{X}$, являющийся вследствие теоремы о дополняющей нежесткости оптимальным. На всех итерациях, кроме последней, частичный план будет содержать не более одного нецелочисленного значения переменной, а на последней – не более двух.

Алгоритм состоит, вообще говоря, из трех этапов: начального, основного и заключительного.

Начальный этап. На этом этапе λ_2 все время равно 0, следовательно, условие (9) автоматически выполняется. Невязки Δ_1 и Δ_2 будут монотонно уменьшаться.

Вначале полагаем $\lambda_1^0 = 0$, $\lambda_2^0 = 0$, $\boldsymbol{x}^0 = 0$. Соотношения (10), (11) по лемме 5 выполняются.

Пусть j итераций этапа выполнены и получены план $\{\lambda_1^j, 0\}$ и частичный план $\boldsymbol{x}^j$, для которых соблюдаются условия (8)–(11), а также выполнено условие a:

если прямая P_i допустима, то $x_i^j = 1$.

Пусть также $\Delta_1(\boldsymbol{x}^j) > 0$.

Первая часть $j+1$-й итерации состоит в переходе от плана $\{\lambda_1^j, 0\}$ к плану $\{\lambda_1^{j+1}, 0\}$, $\lambda_1^{j+1} > \lambda_1^j$. В качестве $(\lambda_1^{j+1}, 0)$ выбирается ближайшая к $(\lambda_1^j, 0)$ справа точка пересечения оси $\overline{O\lambda_1}$ с какой-либо выделенной прямой. Если такой точки нет, то задача $\mathscr{X}$ не имеет решения. Действительно, по лемме 5 и из условия a все x_i равны 1, откуда $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < A$.

Пусть точка $(\lambda_1^{j+1}, 0)$ существует. Тогда проводится вторая часть $j+1$-й итерации. Пусть через точку $(\lambda_1^{j+1}, 0)$ проходят выделенные прямые $P_{r_1}, P_{r_2}, \ldots, P_{r_m}$. Обозначим $I^{j+1} = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Упорядочим эти прямые по убыванию угла, образуемого осью $\overline{O\lambda_1}$ с этими прямыми (напомним, что на выделенных прямых задана ориентация), т.е. по убыванию чисел $\dfrac{1}{b_{r_l}}$. Пусть этот порядок – $r_{\alpha(1)}, r_{\alpha(2)}, \ldots, r_{\alpha(m)}$.

Частичный план $\boldsymbol{x}^{j+1}$ получается из частичного плана $\boldsymbol{x}^j$ увеличением переменных с номерами из I^{j+1} (для $i \notin I^{j+1}$ $x_i^{j+1} = x_i^j$). Переменные увеличиваются по порядку номеров $r_{\alpha(1)}, r_{\alpha(2)}, \ldots, r_{\alpha(m)}$: дойдя до переменной $x_{r_{\alpha(S)}}$, $1 \leqslant S \leqslant m$ полагаем, что $x_{r_{\alpha(S)}}^{j+1}$ – максимальное число, не превосходящее 1 и не делающее невязку Δ_1 отрицательной, т.е.

$$x_{r_{\alpha(S)}}^{j+1} = \min\left\{1, \frac{\Delta_1(\boldsymbol{x}^j) - \sum\limits_{i=1}^{S-1} a_{r_{\alpha(i)}} x_{r_{\alpha(i)}}^{j+1}}{a_{r_{\alpha(S)}}}\right\}.$$

Если новая невязка Δ_1 еще положительна (в этом случае $x_{r_{\alpha(S)}}^{j+1} = 1$), то переходим к следующей переменной $x_{r_{\alpha(S+1)}}$ и так до тех пор, пока либо не получим невязку Δ_1, равную 0, либо не исчерпается все множество номеров I^{j+1}.

Во втором случае итерация оканчивается, и мы переходим к $j+2$-й итерации (соотношения (8)–(11) и условие a очевидно выполняются).

В первом случае оставляем $x_i^{j+1} = 0$, $i \in \{r_{\alpha(S+1)}, \ldots, r_{\alpha(m)}\}$. Для полученного частичного плана $\boldsymbol{x}^{j+1}$ $\Delta_1(\boldsymbol{x}^{j+1}) = 0$, соотношения (8) и (11) выполняются, и имеется не более одного переменного с нецелым значением (а именно $x_{r_{\alpha(S)}}$). Если $\Delta_2(\boldsymbol{x}^{j+1}) \leqslant 0$, то $\boldsymbol{x}^{j+1}$ – оптимальный план (и тогда на основании леммы 4 $]\boldsymbol{x}^{j+1}[$ – точное решение задачи $\mathscr{X}Ц$). Если же $\Delta_2(\boldsymbol{x}^{j+1}) > 0$, то переходим к основному этапу, полагая $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}^{j+1}$, $\lambda_1' = \lambda_1^{j+1}$, $\bar{r} = r_{\alpha(S)}$.

Основной этап. На этом этапе для любого рассматриваемого частичного плана $\boldsymbol{x}$ будет выполняться

$$\Delta_1(\boldsymbol{x}) = 0,$$

а невязка $\Delta_2(\boldsymbol{x})$ будет монотонно не возрастать.

Этап начинается с частичного плана $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}'$ и плана $\{\lambda_1^0, \lambda_2^0\} = \{\lambda_1', 0\}$.

Пусть уже проведено j итераций основного этапа и имеется частичный план $\boldsymbol{x}^j$ и план $\{\lambda_1^j, \lambda_2^j\}$, для которых $\Delta_1(\boldsymbol{x}^j)=0$, $\Delta_2(\boldsymbol{x}^j)>0$, $\lambda_1>0$, а также выполняются соотношения (8)–(11). Предположим, что через точку $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$ проходят прямые $P_{r_1}, P_{r_2}, \dots, P_{r_k}$ (по алгоритму это множество всегда непусто). Пусть $r_{\alpha(1)}, r_{\alpha(2)}, \dots, r_{\alpha(k)}$ – порядок следования этих прямых по убыванию угла между осью $\overline{O\lambda_1}$ и этими прямыми (т.е. по убыванию $b_{r_{\alpha(l)}}/a_{r_{\alpha(l)}}$). Будем считать выполненным условие $\mathfrak{B}$: имеется номер t, $1\leqslant t\leqslant k$ такой, что а) $0< x^j_{r_{\alpha(t)}}\leqslant 1$, б) при $1\leqslant l<t$ $x^j_{r_{\alpha(l)}}=1$, в) при $t<l\leqslant k$ $x^j_{r_{\alpha(l)}}=0$.

Прямую $P_{r_{\alpha(t)}}$ и переменную $x_{r_{\alpha(t)}}$ будем называть *базисной* для $j+1$-й итерации. Для начального частичного плана $\boldsymbol{x}^0$ условие $\mathfrak{B}$ выполняется, и базисной переменной является $x_{\bar r}$.

В первой части $j+1$-й итерации определяем $(\lambda_1^{j+1}, \lambda_2^{j+1})$ как ближайшую (по ориентации) к $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$ точку пересечения базисной прямой $P_{r_{\alpha(t)}}$ с какой-либо выделенной прямой либо с осью $\overline{O\lambda_2}$. Если $b_{r_{\alpha(t)}}\neq 0$, то точка $(\lambda_1^{j+1}, \lambda_2^{j+1})$ всегда существует, поскольку прямая $P_{r_{\alpha(t)}}$ всегда пересекается в положительном квадранте с осью $\overline{O\lambda_2}$. Следовательно, отсутствие точки пересечения может быть лишь при $b_{r_{\alpha(t)}}=0$.

Лемма 6. Если указанной точки не существует, то задача не имеет решения.

Доказательство. Пусть $(\tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2)$ – произвольная точка на прямой $P_{r_{\alpha(t)}}$, лежащая дальше, чем точка $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$. Поскольку при движении по прямой $P_{r_{\alpha(t)}}$ от точки $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$ мы не пересечем выделенных прямых и осей, по условию $\mathfrak{B}$ и по лемме 5 для $\boldsymbol{x}^j$ и $\{\tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2\}$ выполняются соотношения (10), (11). Отсюда непосредственно следует, что для любого $j=1,2,\dots,n$

$$\tilde\mu_i(1-x_i^j)=0. \qquad (13)$$

Кроме того, очевидно

$$a_i\tilde\lambda_1 x_i^j + b_i\tilde\lambda_2 x_i^j - \tilde\mu_i x_i^j \geqslant 0. \qquad (14)$$

Из отношений (13) и (14) имеем

$$0\leqslant \sum_{i=1}^{n} (a_i\tilde\lambda_1 x_i^j + b_i\tilde\lambda_2 x_i^j - \tilde\mu_i x_i^j) = A\tilde\lambda_1 + (B-\Delta_2(\boldsymbol{x}^j))\tilde\lambda_2 - \sum_{i=1}^{n}\tilde\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\tilde\mu_i(1-x_i^j) =$$

$$= A\tilde\lambda_1 + B\tilde\lambda_2 - \sum_{i=1}^{n}\tilde\mu_i - \Delta_2(\boldsymbol{x}^j) = L^*(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2) - \Delta_2(\boldsymbol{x}^j)\tilde\lambda_2,$$

или $L^*(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2)\geqslant\Delta_2(\boldsymbol{x}^j)\tilde\lambda_2$.

Поскольку, двигаясь вдоль $P_{r_{\alpha(t)}}$, можно сделать $\tilde\lambda_2$ неограниченно большим, и $\Delta_2(\boldsymbol{x}^j)>0$, то $L^*(\lambda_1,\lambda_2)$ неограниченно сверху. Тогда по известной теореме задача $\mathfrak{X}$ не имеет решения. Лемма доказана.

Пусть точка $(\lambda_1^{j+1}, \lambda_2^{j+1})$ нашлась. Соотношения (10) и (11) для $\{\lambda_1^{j+1}, \lambda_2^{j+1}\}$ и $\boldsymbol{x}^j$ выполняются, что следует из условия $\mathfrak{B}$ и леммы 5.

Опишем вторую часть итерации. Пусть через точку $(\lambda_1^{j+1}, \lambda_2^{j+1})$ проходят выделенные прямые $P_{r'_1}, P_{r'_2}, \dots, P_{r'_p}$. Упорядочим их по убыванию угла между осью $\overline{O\lambda_1}$ и этими прямыми – $P_{r'_{\alpha(1)}}, P_{r'_{\alpha(2)}}, \dots, P_{r'_{\alpha(p)}}$. Положим $x_i^{j+1}=x_i^j$ при $i\notin I^{j+1}=\{r'_{\alpha(1)},\dots,r'_{\alpha(p)}\}$.

Назначим x_i^{j+1}, $i\in I^{j+1}$. Предварительно положим $\tilde x_{r'_l}=x^j_{r'_l}$ и $x^{j+1}_{r'_l}=0$, $l=1,2,\dots,p$. Будем изменять значения этих переменных по следующим правилам. Производим параллельный перебор переменных, начиная от $x_{r'_{a(1)}}$ от базисной переменной $x_{r'_{a(t)}} = x_{r'_{a(u)}}$ в соответствии с установленным порядком. Заметим, что $x_{r'_{a(\ell)}} = 0$ при $1 \leqslant \ell \leqslant u$ и $\tilde{x}_{r'_{a(\ell)}} > 0$ при $u \leqslant \ell \leqslant p$, что следует из леммы 5 для точки $(\lambda_1^j, \lambda_2^j)$. В первом переборе мы увеличиваем x_i^{j+1}, во втором (параллельном) уменьшаем $\tilde{x}_i$, при этом следим за тем, чтобы по сумме значений переменных всегда выполнялось $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$. Текущий номер при первом переборе будет обозначать $r'_{a(S)}$, при втором – $r'_{a(v)}$. На очередном шаге вычисляем величины

$$\tilde{\Delta}_2 = B - \sum_{i \notin I^{j+1}} b_i x_i^{j+1} - \sum_{\ell=1}^{S} b_{r'_{a(\ell)}} x^{j+1}_{r'_{a(\ell)}} - \sum_{\ell=v}^{p} b_{r'_{a(\ell)}} \tilde{x}_{r'_{a(\ell)}},$$

$$\theta = \min \left\{ a_{r'_{a(S)}} (1 - x^{j+1}_{r'_{a(S)}});\ a_{r'_{a(v)}} \tilde{x}_{r'_{a(v)}} \right\}.$$

Увеличиваем $x^{j+1}_{r'_{a(S)}}$ на $\gamma \cdot \theta / a_{r'_{a(S)}}$ и уменьшаем $\tilde{x}_{r'_{a(v)}}$ на $\gamma \cdot \theta / a_{r'_{a(v)}}$, где γ–максимальное число, не превосходящее единицы, и такое, что в результате назначения новая величина Δ_2 не станет отрицательной, т.е.

$$\gamma = \min \left\{ 1,\ \max \left\{ 0,\ \tilde{\Delta}_2 / \frac{\theta}{a_{r'_{a(S)}}} \cdot b_{r'_{a(S)}} - \frac{\theta}{a_{r'_{a(v)}}} \cdot b_{r'_{a(v)}} \right\} \right\}.$$

Можно показать, что невязка $\tilde{\Delta}_2$ не увеличится, но для нас это не важно. В результате работы с $x^{j+1}_{r'_{a(S)}}$ и $x_{r'_{a(S)}}$ получаем либо новое $x^{j+1}_{r'_{a(S)}}$

равное 1, тогда переходим к следующему переменному в первом наборе – $\tilde{x}_{r'_{a(S+1)}}$ (случай a), либо новое $\tilde{x}_{r'_{a(v)}}$ равное 0, тогда во втором наборе берем следующее переменное $x_{r'_{a(v+1)}}$ (случай $б$), либо Δ_2 стало равно 0, в этом случае полагаем $x^{j+1}_{r'_{a(l)}} = \tilde{x}_{r'_{a(l)}}$, $l = s+1, \ldots, p$ (при этом s не может быть равно v (случай b). Очевидно, что в случае b x^{j+1} – оптимальный план (легко проверить, что $\Delta_1(x^{j+1}) = \Delta_2(x^{j+1}) = 0$) и число нецелых значений переменных не более двух, ими могут быть только $x^{j+1}_{r'_{a(s)}}$ и $x^{j+1}_{r'_{a(v)}}$.

Процесс оканчивается либо в случае b, либо когда все $\tilde{x}_{r'_{a(l)}}$ станут равными нулю. Полагаем, как и раньше, $x^{j+1}_{r'_{a(l)}}$ равными 0, $l = s+1, \ldots, p$. Итерация с номером $j+1$ оканчивается. В качестве базисных прямой и переменной для $j+2$-й итерации берутся $P_{r'_{a(s)}}$ и $x_{r'_{a(s)}}$. Тем самым условие $\mathfrak{B}$ выполнено.

Основной этап заканчивается как только мы попадаем на ось $O\lambda_2$, т.е. очередное $\lambda_1^{j+1} = 0$. Тогда переходим к заключительному этапу, полагая $\{\lambda_1'', \lambda_2''\} = \{O, \lambda_2^{j+1}\}$, $x'' = x^{j+1}$.

Заключительный этап. Этот этап аналогичен начальному. Двойственные планы будут изменяться вдоль оси $0\lambda_2$ в положительном направлении, последовательно проходя через точки пересечения этой оси с выделенными прямыми, т.е. $\lambda_1 = 0$. Невязка $\Delta_1(x)$ $(\Delta_2(x))$ будет монотонно уменьшаться (не увеличиваться) при этом ввиду того, что $\lambda_1 = 0$ условие (8) всегда будет выполнено.

Заключительный этап начинается с предварительной итерации – увеличения "x'' (для того, чтобы изменить $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, необходимо, чтобы все допустимые переменные были равны 1). Последовательно, начиная с базисной, перебираем допустимые переменные x_{δ_1}, $x_{\delta_2}, \ldots, x_{\delta(q)}$ и увеличиваем их так, чтобы не превысить единицы и не сделать невязку Δ_2 отрицательной. Поскольку $b_{\delta_l} = \dfrac{1}{\lambda''_2} > 0$, $l = 1, 2, \ldots, q$, и $a_l \geqslant 0$, невязка Δ_2 будет монотонно уменьшаться, невязка Δ_1 – не увеличиваться. Если невязка Δ_2 стала равна 0, то получен оптимальный план. Если же x_{δ_l} перебраны (в этом случае все они равны 1) и $\Delta_2 > 0$, то начинаются итерации по типу начального этапа.

В конце заключительного этапа получаются $\{ \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \}$ и $\bar{x}$ такие, что $\Delta_2 (\bar{x}) = 0$, тогда $\bar{x}$ – оптимальный план, $\Delta_2 (\bar{x}) > 0$ и не существует точки пересечения оси $\overline{O\lambda_2}$ с какой-либо выделенной прямой, ордината которой больше $\bar{\lambda}_2$, тогда задача $\mathscr{X}$ не имеет решения.

Сходимость и оценка алгоритма

В дальнейшем под "точкой" будем подразумевать точки пересечения выделенных прямых между собой, а также с осями, а под "прямой" – выделенную прямую либо ось.

Число итераций начального (заключительного) этапа не превосходит числа точек на оси $\overline{O\lambda_1}$ ($\overline{O\lambda_2}$), т.е. оценивается сверху величиной $n + 1$ (n).

На итерации основного этапа мы переходим по базисной прямой от точки $(\lambda^j_1, \lambda^j_2)$ к точке $(\lambda^{j+1}_1, \lambda^{j+1}_2)$, причем либо $\lambda^{j+1}_2 > \lambda^j_2$, либо $\lambda^{j+1}_1 < \lambda^j_1$, если $\lambda^{j+1}_2 = \lambda^j_2$. Следовательно, все точки на итерациях основного этапа различны, поэтому число итераций этапа оценивается сверху величиной $n^2 + 1$. Итак, общее число итераций не более $n^2 + 2n + 2$. Отсюда следует конечная сходимость алгоритма.

На первой части итерации производится сдвиг из одной точки базисной прямой в соседнюю точку. В § 7 будет описан алгоритм предварительной обработки

совокупности прямых, находящий для каждой точки на каждой прямой следующую точку (т.е. упорядочивающий точки на прямых). Следовательно, общее число действий на первых частях итераций оценивается как $O(n^2)$.

Для экономной работы алгоритма на второй части итерации все время поддерживаются текущие значения величин Δ_1 и Δ_2, которые немедленно исправляются при изменении x. Благодаря этому можно так организовать процесс вычисления, чтобы на каждое изменение x_i тратилось ограниченное число действий. Число изменений значений допустимых переменных, как видно из алгоритма, "пропорционально" числу допустимых прямых (для недопустимых переменных изменения и переназначения не производятся), следовательно, общее число таких действий за весь алгоритм может быть оценено как $O(\eta)$, где η – множество пар: точка положительного квадранта и инцидентная ей выделенная прямая. Число η не превосходит числа отрезков выделенных прямых между двумя соседними точками плюс числа лучей на этих прямых (не содержащих внутри себя точек), лежащих в положительном квадранте, что не превосходит величины $n(n + 1)$. Итак общее число действии на изменение x оценивается как $O(n^2)$.

Кроме того, на вторых частях итераций определяется порядок следования выделенных прямых, проходящих через текущую точку по убыванию угла с осью $O\lambda_1$. Эта деятельность включается в алгоритм предварительной обработки.

Для алгоритма предварительной обработки (АПО), описанного ниже, будет доказана оценка числа действий $O(n^2)$. Тем самым оценка алгоритма всей задачи – $O(n^2)$.

§ 7. Алгоритм предварительной обработки

Скажем, что множество $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_p\}$ задано в виде правого (левого) *списка* [1], если фиксировано некоторое упорядочение этого множества – $m_{i(1)}, m_{i(2)}, \ldots, m_{i(p)}$, которое задается указанием первого элемента $m_{i(1)}$, последнего – $m_{i(p)}$ и для каждого элемента $m_{i(j)}$, кроме последнего (первого) – последующего элемента $m_{i(j+1)}$ (предыдущего – $m_{i(j-1)}$). Правый (левый) список позволяет за $O(1)$ действий: а) вставлять в список новый элемент после (перед) известным элементом, б) удалять элемент из начала (конца) списка.

В начале АПО вычисляются координаты точек пересечения прямых, на что требуется $O(n^2)$ действий. Кроме того, выделенные прямые упорядочиваются по возрастанию угла с осью $\overline{O\lambda_1}$ (т.е. по возрастанию величин $\frac{b_i}{a_i}$), на что требуется $O(n \log_2 n)$ действий. Пусть этот порядок прямых – $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \ldots, P_{\beta(n)}$.

АПО состоит из n итераций. На i-й итерации к рассмотренному ранее набору прямых $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \ldots, P_{\beta(i-1)}$ добавляется прямая $P_{\beta(i)}$.

Пусть прямые $P_{\beta(1)}, \ldots, P_{\beta(i-1)}$ разбивают положительный квадрант на многоугольники $M_1, M_2, \ldots, M_N$ (некоторые из них незамкнутые). Присоединим к множеству вершин многоугольников "бесконечную" вершину, в которой "сходятся" все стороны-лучи, тем самым незамкнутые многоугольники можно рассматривать как замкнутые. Назовем нижней (верхней) вершиной многоугольника M_j вершину с наименьшей (наибольшей) ординатой, а если таких вершин две, то любую из них, за исключением случая, когда эти точки лежат на $\overline{O\lambda_1}$, тогда берется в качестве нижней вершины левая из них. Правой (левой) границей многоугольника назовем правую (левую) часть ограничивающей его ломаной линии между нижней и верхней вершинами

Теперь под "прямой" будем подразумевать прямые $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \ldots, P_{\beta(i-1)}$ и оси $\overline{O\lambda_1}$, $\overline{O\lambda_2}$, а под словом "точка" или "вершина" – точки пересечения этих прямых в положительном квадранте. Иногда к этим множествам будем добавлять прямую $P_{\beta(i)}$ и точки ее пересечения с прямыми $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \ldots, P_{\beta(i-1)}$, $\overline{O\lambda_1}$, $\overline{O\lambda_2}$.

Перед началом i-й итерации задана следующая информация:

1) совокупность многоугольников (в виде массива или списка $\mathcal{M}$);

2) для каждого многоугольника M_j – правые списки его правой $\Gamma^{П}(M_j)$ и левой $\Gamma^{Л}(M_j)$ границ, начиная с верхней и кончая нижней вершиной, заданные в виде точка – прямая – следующая точка – следующая прямая и т.д.;

3) для каждой прямой P правый список $V(P)$ точек на ней в порядке ориентации прямой (для $\overline{O\lambda_1}$ – в порядке увеличения λ_1, для $\overline{O\lambda_2}$ – в порядке увеличения λ_2);

4) для каждой вершины (λ_1, λ_2) – правые списки $S(\lambda_1, \lambda_2)$ выделенных прямых, проходящих через эту вершину в порядке убывания угла с осью $\overline{O\lambda_1}$;

5) для каждой стороны $b = (\lambda_1', \lambda_2'), (\lambda_1'', \lambda_2'')$ – адрес информации о многоугольнике "слева" (адрес в массиве $\mathcal{M}$), т.е. о том из двух многоугольников, который лежит с той же стороны от прямой, содержащей b, что и точка $(0,0)$. Этот многоугольник будет обозначаться $M(b)$.

Лемма 7. Если прямая $P_{\beta(i)}$ рассекает многоугольник M_j, то нижняя точка многоугольника лежит справа, а верхняя – слева от $P_{\beta(i)}$. Таким образом, $P_{\beta(i)}$ пересекает вначале правую, а затем левую границы M_j.

Доказательство. Пусть прямая $P_{\beta(i)}$ пересекает M_j в точках C_1 и C_2, и C_2 находится дальше на прямой $P_{\beta(i)}$. Пусть $b_1 \in P_{\beta(r_1)}$ и $b_2 \in P_{\beta(r_2)}$ – стороны M_j, пересекающиеся (быть может только по нижним концам) с $P_{\beta(i)}$ и имеющие точки правее $P_{\beta(i)}$ (рис. 4).

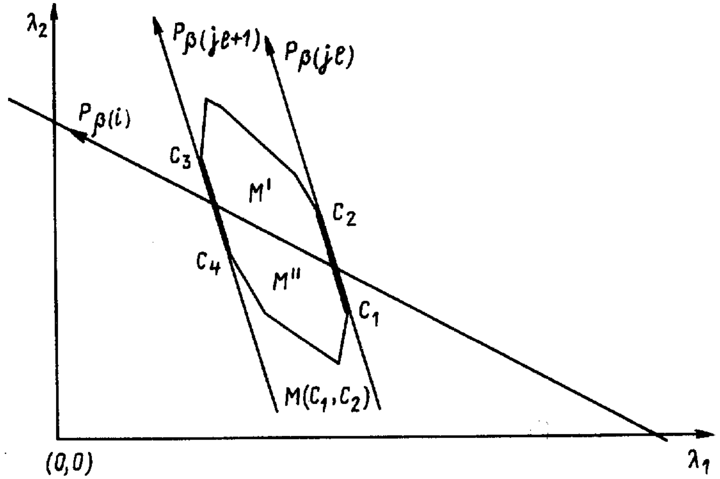

Рис. 4

По условию прямая $P_{\beta(i)}$ имеет наибольший наклон относительно $\overline{O\lambda_1}$, поэтому $P_{\beta(r_1)}$ и $P_{\beta(r_2)}$ направлены из левой полуплоскости относительно $P_{\beta(i)}$ в правую, и λ_2 при движении по этим прямым возрастает. Следовательно, верхняя точка лежит на участке границы между C_1 и C_2 правее $P_{\beta(i)}$. Аналогично доказывается и для нижней вершины. Лемма доказана.

На i-й итерации будет построена система многоугольников для прямых $\overline{O\lambda_1}$, $\overline{O\lambda_2}$, $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \ldots, P_{\beta(i)}$, исходя из имеющейся системы, списки V прямых пополняются новыми точками и т.д., т.е. будет получена вся информация (1 – 5) для выделенных прямых.

Будем обозначать точку пересечения прямых P и P' через (P, P'), а ее координаты – $\lambda_1(P, P')$ и $\lambda_2(P, P')$.

Описание алгоритма. В начале проводится предварительное построение – включение точки $(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)})$ в список $V(\overline{O\lambda_1})$. Для этого идем по списку $V(\overline{O\lambda_1})$ с начала и сравниваем абсциссы перебираемых вершин с $\lambda_1(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)})$, находим соответствующее место в списке, куда эту точку следует вставить, и вставляем ее туда. Пусть $(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(j)})$ и $(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(k)})$ – две ближайшие к $(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)})$ слева и справа вершины:

$$\lambda_1(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(j)}) < \lambda_1(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)}) \leqslant \lambda_1(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(k)}).$$

Если $\lambda_1(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)}) = \lambda_1(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(k)})$, то вводим в начало списка $S(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(k)})$ прямую $P_{\beta(i)}$, имеющую наибольший угол с осью $\overline{O\lambda_1}$. Предварительное построение на этом заканчивается. Очевидно $P_{\beta(i)}$ разбивает многоугольник $M((\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(j)}), (\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(k)})$.

Пусть ℓ шагов в АПО уже проведено: уже рассмотрен отрезок прямой $P_{\beta(i)}$ с началом в $(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)})$, концом в $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_\ell)})$, содержащий $\ell + 1$ вершин $(\overline{O\lambda_1}, P_{\beta(i)}), (P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_1)}), \ldots, (P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_\ell)})$; построен список $V(P_{\beta(i)})$, списки $V(P_{\beta(j_r)})$, $r = 1, 2, \ldots, \ell$ пополнены точками $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_r)})$, построены новые многоугольники разбиения и т.д.

Опишем $\ell + 1$-й шаг. Возможны две ситуации: 1) через точку $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_\ell)})$ проходит только одна прямая $P_{\beta(j_\ell)}$ старой системы; 2) таких прямых несколько, пусть, например, $P_{\beta(j_\ell)}$ – прямая наибольшего наклона среди них, т.е. первый элемент списка $S(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_\ell)})$. Пусть C_1 и C_2 – две соседние с $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_\ell)})$ точки прямой $P_{\beta(j_\ell)}$ (во втором случае C_1 совпадает с $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_1)})$: $\lambda_2(C_1) \leqslant \lambda_2(P_{\beta(i)}, P_{\beta(j_\ell)}) < \lambda_2(C_2)$ (рис. 5). Очевидно $P_{\beta(i)}$ рассекает многоугольник $M(C_1, C_2)$ (точка

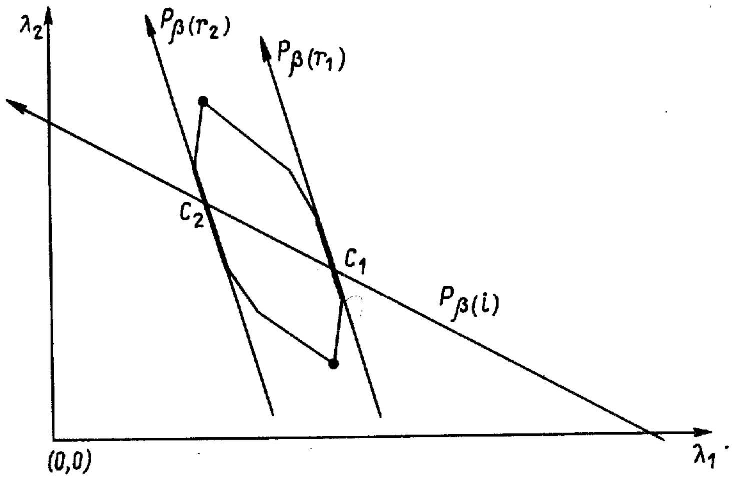

Рис. 5

$(P_{\beta(i)}, P_{\beta(i_\ell)})$ находится на правой границе многоугольника $M(C_1, C_2)$. Опишем процесс нахождения многоугольников разбиения прямой $P_{\beta(i)}$ многоугольника $M(C_1, C_2)$. Находится другая точка пересечения прямой $P_{\beta(i)}$ с границей многоугольника $M(C_1, C_2)$. По лемме 7 эта точка лежит на левой границе. Последовательно перебираем точки списка $Г^Л(M(C_1, C_2))$ с начала (верхней вершины) и смотрим, лежат ли они справа от $P_{\beta(i)}$. В конце концов либо находим точку C_3 списка, лежащую на $P_{\beta(i)}$, либо находим пару точек C_3, C_4 (принадлежащих прямой $P_{\beta(i_{\ell+1})}$ таких, что C_3 лежит справа, а C_4 – слева от $P_{\beta(i)}$). В первом случае искомая точка – C_3, во втором – $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(i_{\ell+1})})$. Заносим полученную точку в конец списка $V(P_{\beta(i)})$ и во втором случае эту же точку в список $V(P_{\beta(i_{\ell+1})})$ между

C_4 и C_3. Вместо многоугольника $M(C_1, C_2)$ заносим в массив M два многоугольника "правый" M′ и "левый" M″. Формируем их правые и левые границы из границ многоугольника $M(C_1, C_2)$: граница $Г^Л(M')$ многоугольника M′ получается из участка $Г^Л(M(C_1, C_2))$ от верхней точки до C_3 с добавлением в первом случае прямой $P_{\beta(i)}$ и точки $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(i_\ell)})$ и во втором случае – прямой $P_{\beta(i_{\ell+1})}$, точки $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(i_\ell)})$, прямой $P_{\beta(i)}$ и точки $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(i_\ell)})$. Аналогично формируются $Г^П(M')$, $Г^Л(M'')$, $Г^П(M'')$. Для формирования всех четырех границ достаточно одного обхода границы многоугольника $M(C_1, C_2)$.

Итак $\ell+1$-й шаг итерации АПО описан. Итерация кончается, когда мы доходим до точки $(\overline{O\lambda_2}, P_{\beta(i)})$. В конце всего АПО строится список $V(\overline{O\lambda_2})$ ($O(n \log_2 n)$ действий).

Оценка АПО. При детальном рассмотрении $\ell+1$-го шага можно убедиться, что число действий в нем благодаря использованию информации (1 – 5) "пропорционально" числу вершин $|M(C_1, C_2)|$ многоугольника $M(C_1, C_2)$. Тем самым число действий на i-й итерации, включая предварительное построение, можно оценить как $O(i + \sum_{j \in I} |M_j|)$, где I – множество индексов тех многоугольников в M, которые рассекаются прямой $P_{\beta(i)}$. Ниже доказывается теорема, что $\sum_{j \in I} |M_j| < 8(i-1)+4$. Тем самым оценка i-й итерации – $O(i)$, а всего АПО – $O(\sum_{i=1}^{n} i) = O(n^2)$.

Теорема 2. $\sum_{j \in I} |M_j| < 8(i-1)+4$, – где I – множество индексов тех многоугольников из M, которые рассекаются прямой $P_{\beta(i)}$, имеющей больший угол с осью $\overline{O\lambda_1}$, чем у прямых $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \dots, P_{\beta(i-1)}$[x].

Доказательство. Пусть $P_{\beta(i)}$ рассекает многоугольник M_j. Обозначим $\Gamma^{\text{ПП}}(M_j)$ ($\Gamma^{\text{ПЛ}}(M_j)$) – часть границы $\Gamma^{\text{П}}(M_j)$, лежащую не левее (левее) $P_{\beta(i)}$ ($\Gamma^{\text{П}}(M_j)) = \Gamma^{\text{ПП}}(M_j) \cup \Gamma^{\text{ПЛ}}(M_j)$). Аналогично обозначим $\Gamma^{\text{ЛП}}(M_j)$ ($\Gamma^{\text{ЛЛ}}(M_j)$) – часть границы $\Gamma^{\text{Л}}(M_j)$, лежащую не левее (левее) $P_{\beta(i)}$. Обозначим $|\Gamma|$ – число вершин в Γ. Мы покажем, что

$$\sum_{j\in I} |\Gamma^{\text{ПП}}(M_j)| \leqslant 2i' + 1, \tag{15}$$

$$\sum_{j\in I} |\Gamma^{\text{ПЛ}}(M_j)| \leqslant 2i' + 1, \tag{16}$$

$$\sum_{j\in I} |\Gamma^{\text{ЛП}}(M_j)| \leqslant 2i' + 1, \tag{17}$$

$$\sum_{j\in I} |\Gamma^{\text{ЛЛ}}(M_j)| \leqslant 2i' + 1 \tag{18}$$

(здесь $i' = i - 1$), откуда будет следовать теорема.

Докажем соотношение (15). Доказательство проведем индукцией по i'. При $i' = 0$ $\sum |\Gamma^{\text{ПП}}(M_j)| = 1$ и соотношение (15) верно.

Пусть для $i' = i - 2$ равенство (15) выполняется. Удалим из системы $P_{\beta(1)}, P_{\beta(2)}, \dots, P_{\beta(i-1)}$ прямую наименьшего наклона $P_{\beta(1)}$.

Пусть $M'_1, M'_2, \dots, M'_k$ – многоугольники разбиения положительного квадранта прямыми $\overline{O\lambda_1}$, $\overline{O\lambda_2}$, $P_{\beta(2)}, P_{\beta(3)}, \dots, P_{\beta(i-1)}$, рассекаемые прямой $P_{\beta(i)}$. По предположению индукции

$$\sum_{j=1}^{k} |\Gamma^{\text{ПП}}(M_j)| \leqslant 2(i-2) + 1.$$

[x] В действительности теорема верна и в случае произвольной прямой $P_{\beta(i)}$.

Многоугольники M_ℓ, $\ell \in I$ являются некоторыми частями многоугольников M'_j, $j = 1, 2, \dots, k$, получающиеся из разбиения последних прямой $P_{\beta(1)}$. Пусть M'_s, $1 \leqslant s \leqslant k$ многоугольник, внутри которого лежит точка $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(1)})$ (случай, когда эта точка лежит на границе, ничем принципиально не отличается). Прямая $P_{\beta(1)}$ рассекает многоугольник M'_s на две части – правую M_{ℓ_1} и левую M_{ℓ_2} (см. рис. 6). Очевидно $\ell_1 \in I$, $\ell_2 \in I$. Пусть $\Gamma^{\text{ПП}}(M'_s)$ содержит вершины $C_1, C_2, \dots, C_r$ (C_r – верхняя точка в M'_s), и пусть прямая $P_{\beta(1)}$ пересекает эту границу в точке C', лежащей между C_t и C_{t+1}. Тогда

$$\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell_1}) = \{C_1, C_2, \dots, C_t, C'\}, \Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell_2}) = \{C'', C', C_{t+1}, \dots, C_r\}$$

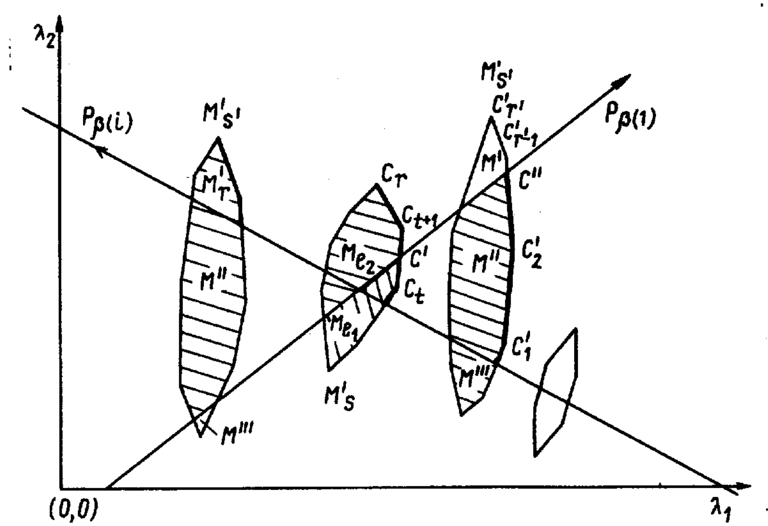

Рис. 6

и

$$|\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell_1})| + |\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell_2})| \leqslant |\Gamma^{\text{ПП}}(M'_s)| + 2.$$

Рассмотрим теперь многоугольник $M'_{s'}$, $1 \leqslant s' \leqslant k$, $s' \neq s$. Пусть $\Gamma^{\text{ПП}}(M'_{s'})$ содержит вершины $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{r'}$, где $C'_{r'}$ – верхняя точка в $M'_{s'}$. Верхняя точка в $M'_{s'}$ лежит левее $P_{\beta(1)}$, а нижняя – правее, что доказывается аналогично лемме 7 (здесь используется то, что $P_{\beta(1)}$ – прямая наименьшего наклона). Многоугольник $M'_{s'}$ прямыми $P_{\beta(i)}$ и $P_{\beta(1)}$ разбивается на 3 части: "верхнюю" часть M', лежащую левее $P_{\beta(1)}$ и правее $P_{\beta(i)}$ (в ней по лемме 7 и из сделанного замечания лежит верхняя точка многоугольника $M'_{s'}$), "нижнюю" – M''', лежащую правее $P_{\beta(1)}$ и левее $P_{\beta(i)}$ (в ней лежит нижняя точка многоугольника $M'_{s'}$) и "среднюю" M''.

Возможны два случая расположения многоугольника $M'_{s'}$ относительно точки $(P_{\beta(i)}, P_{\beta(1)})$ – левое расположение, когда M'' лежит левее $P_{\beta(1)}$ и $P_{\beta(i)}$, и правое, когда M'' лежит правее $P_{\beta(1)}$ и $P_{\beta(i)}$.

В случае левого расположения многоугольник $M'_{s'}$ порождает один многоугольник $M_\ell = M' \cup M''$ системы $\{M_t\}$, $t \in I$. В этом случае $\Gamma^{\text{ПП}}(M_\ell) = \Gamma^{\text{ПП}}(M'_{s'})$ и $|\Gamma^{\text{ПП}}(M_\ell)| = |\Gamma^{\text{ПП}}(M'_{s'})|$.

Рассмотрим случай правого расположения $M'_{s'}$. В этом случае $M'_{s'}$ порождает также один многоугольник $M_{\ell'} = M'' \cup M'''$. Из указанного выше расположения нижней и верхней точек многоугольника $M'_{s'}$ следует, что граница $\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell'})$ является частью границы $\Gamma^{\text{ПП}}(M'_{s'})$ – от точки пересечения $P_{\beta(i)}$ с $\Gamma^{\text{П}}(M'_{s'})$ до точки C'' пересечения $P_{\beta(1)}$ с $\Gamma^{\text{П}}(M'_{s'})$. В $\Gamma^{\text{ПП}}(M'_{s'})$ содержится r' точек, а в $\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell'})$ – часть этих точек, не включающая $C'_{r'}$, но имеющая быть может "лишнюю" точку C''. Следовательно,

$$|\Gamma^{\text{ПП}}(M_{l'})| \leqslant |\Gamma^{\text{ПП}}(M'_{s'})|.$$

Не рассмотренные многоугольники, рассекаемые $P_{\beta(i)}$, в обеих системах совпадают. В итоге имеем

$$2(i-2)+1+2 \geqslant \sum_{j=1}^{k} |\Gamma^{\text{ПП}}(M'_j)| + 2 =$$

$$= |\Gamma^{\text{ПП}}(M'_s)| + 2 + \sum_{j=1,\, j\neq s}^{k} |\Gamma^{\text{ПП}}(M'_j)| \geqslant$$

$$\geqslant |\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell_1})| + |\Gamma^{\text{ПП}}(M_{\ell_2})| + \sum_{l \in I \setminus \{\ell_1, \ell_2\}} |\Gamma^{\text{ПП}}$$

$$(M_\ell)| = \sum_{\ell \in I} |\Gamma^{\text{ПП}}(M_\ell)|.$$

Неравенство (15) доказано. Аналогично доказывается и неравенство (18). Доказательство (16) и (17) проводится также по индукции, причем из системы $P_{\beta(1)}, \ldots, P_{\beta(i-1)}$ удаляется прямая наибольшего наклона $P_{\beta(i-1)}$. Теорема доказана.

8. Алгоритм для случая k валют

Рассмотрим обобщение задачи для случая k валют: дано n банкнот, каждая из которых (i-я) имеет неотрицательную стоимость $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ki}$ по валютам $1, 2, \ldots, k$. Требуется выбрать минимальное число банкнот, удовлетворяющих по каждой (j-й) валюте требование A_j.

Эта задача на языке целочисленного линейного программирования формулируется следующим образом (задача $\mathscr{Z}^{\text{Ц}}$):

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geqslant A_j, \; j = 1, 2, \ldots, k, \qquad (19)$$

$$x_i = \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \to \min$$

Мы будем решать соответствующую линейную программу $\mathscr{L}$, т.е. программу, в которой условие (20) заменено следующими

$$-x_i \geqslant -1, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{20'}$$

$$x_i \geqslant 0 \tag{20''}$$

при этом окажется, что в оптимальном решении не более k переменных имеют нецелые значения. Обозначим $]\boldsymbol{x}[$ вектор, получающийся из $\boldsymbol{x}$ округлением нецелых значений до ближайшего целого сверху.

Лемма 8 (обобщение леммы 4). Если $\boldsymbol{x}^{\text{Ц}}$ – оптимальное решение задачи $\mathscr{L}$ и $\boldsymbol{x}$ – оптимальное решение задачи $\mathscr{L}$, имеющее не более k переменных с нецелочисленными значениями, то

$$L(]\boldsymbol{x}[) \leqslant L(\boldsymbol{x}^{\text{Ц}}) + k - 1,$$

т.е. $]\boldsymbol{x}[$ – квазиоптимальное решение задачи о банкнотах, отличающееся (по числу банкнот) от оптимального не более чем на $k - 1$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Двойственная к $\mathscr{L}$ линейная программа $\mathscr{L}^*$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ji}\lambda_j - \mu_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

$$\lambda, \mu \geqslant 0,$$

$$L^*(\lambda, \mu) = \sum_{j=1}^{k} A_j \lambda_j - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \to \max$$

Как и для случая двух валют, переменные μ_i можно исключить, положив

$$\mu_i = \max\{0, \sum a_{ji}\lambda_j - 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{22}$$

Задача решается вариантом прямо-двойственного метода, при котором поддерживаются соотношения дополняющей нежесткости

$$\Delta_j(\boldsymbol{x}) < 0 \Rightarrow \lambda_j = 0; \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ji}\lambda_j < 1 \Rightarrow x_i = 0; \tag{24}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ji}\lambda_j > 1 \Rightarrow x_i = 1 \tag{25}$$

и минимизируется сумма положительных невязок $\tilde{\Delta}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} \max\{0, \Delta_j(\boldsymbol{x})\}$. Мы приведем только геометрическую интерпретацию метода. В каждый момент определен план, который изображается точкой k-мерного пространства, в которой пересекаются k гиперплоскостей – гиперплоскостей $P_i(\sum_{j=1}^{k} a_{ji}\lambda_j = 1)$ и гиперплоскостей ортанта, находящихся в общем положении. Соотношения (24) – (25) означают, что от граничных значений 0 и 1 отличны только значения тех переменных, которые соответствуют гиперплоскостям, проходящим через точку $\{\lambda\}$. Пересчет двойственного плана интерпретируется как движение от точек $\{\lambda\}$ вдоль выделенного (базисного) луча, принадлежащего $k - 1$ гиперплоскостям. Движение прекращается, как только мы выходим на некоторую новую гиперплоскость. Для новой точки $\{\lambda\}$ решается пара вспомогательных задач: пересчет частичного плана $\boldsymbol{x}$ с уменьшением невязки (линейная программа размера $k \times k$) и определение нового базисного луча. Число итераций оценивается через число точек пересечения $n + k$ гиперплоскостей k-мерного пространства, находящихся в общем положении, т.е. C_{n+k}^{k}.

Отсюда можно получить оценку действий алгоритма – $O(kn + k^2 2^{2k}(n+k)^k)$.

Литература

1. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. М., "Наука", 1975.
2. Левин Л.А. Универсальные задачи перебора. "Проблема передачи информации", т. 9, 1973, № 3.
3. Karp R.M. Reducibility among Combinatorial Problems, Proceedings of the Symposium on the Complexity of Computer Computations, Plenum Press, N.Y., 1972.