ВНИИ
СИСТЕМНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

А. В. КАРЗАНОВ

ЗАДАЧИ О МУЛЬТИРАЗРЕЗАХ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

ПРЕПРИНТ

МОСКВА
1982

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 518.5

Карзанов А.В. Задачи о мультиразрезах и методы их решения. Препринт. М., Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований, 1982.

Работа посвящена теоретическому исследованию задач об упаковках разрезов в неориентированные сети, называемых задачами о мультиразрезах. Для основных типов таких задач получены теоремы линейной двойственности. Выделены классы задач, для которых двойственные оценки имеют специальный вид (т.н. классы ОКЦ), для задач этих классов ответ полностью обусловлен длинами кратчайших цепей, соединяющих полюса сети. Получено полное описание классов ОКЦ для задач о максимальном мультиразрезе и задач о допустимости. Предложены эффективные комбинаторные алгоритмы решения ряда задач о мультиразрезах. Исследован вопрос о дробности решения мультиразрезных задач для целочисленных сетей.

UDK 518.5

Karzanov A.V. Multicut problems and methods to solve them. Preprint. M., The Institute for Systems Studies, 1982.

The work is devoted to theoretical studies of cut packing problems on undirected networks, called multicut problems. For the considered types of such problems linear duality theorems are obtained. Classes of multicut problems are introduced being specified by a natural kind of linear duality (so-called DSC-classes); the problems of these classes are characterized by the property: their answers depend only on the lengths of shortest chains connecting pairs of network terminals. A complete description of the DSC-classes for the maximum multicut problems and the multicut feasibility problems are given. Efficient combinatorial algorithms solving a number of multicut problems are constructed. The question of solution fractionality of multicut problems on the networks with integer-valued capacities is studied.

РЕЦЕНЗЕНТ: канд. физ.-мат. наук Шоломов Л.А.

Утверждено к печати Редакционным советом Института

6716

I-2

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена теоретическому исследованию задач об упаковках для одного класса комбинаторных объектов. В дискретной математике под задачей об упаковке принято понимать следующее. Имеется некоторое конечное множество S, элементам которого приписаны неотрицательные веса $c(e)$ (называемые также, в зависимости от интерпретации задачи, пропускными способностями, длинами, интенсивностями и т.д.). Выделено некоторое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества S, называемых объектами упаковки; эти объекты обычно имеют определенный комбинаторный смысл и задаются неявно (их число, как правило, экспоненциально велико по сравнению с числом элементов в S). Требуется найти неотрицательные веса α_F объектов $F \in \mathcal{F}$, удовлетворяющие основному условию упаковки

$$\lambda^{\alpha}(e) \stackrel{def}{=} \sum (\alpha_F : F \in \mathcal{F},\ e \in F) \leq c(e) \qquad \forall e \in S$$

и ряду дополнительных условий. К дополнительным условиям на α могут относиться (в разных сочетаниях) условия достижения экстремумов целевых функций, ограничения в виде неравенств или равенств, требования целочисленности или булевости и др. В теории упаковок наиболее популярны следующие три типа задач: 1) задача о максимальной упаковке, состоящая в отыскании функции α с максимальной величиной $\|\alpha\| = \sum (\alpha_F : F \in \mathcal{F})$, 2) задача о допустимости (или о существовании), в которой семейство $\mathcal{F}$ разбито на подсемейства $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$, и нужно удовлетворить требованиям $\sum (\alpha_F : F \in \mathcal{F}_i) \geq d_i,\ i=1,\ldots,m,$ для заданных величин d_i, 3) стоимостная задача, состоящая в максимизации целевой функции $\sum (a(e)\lambda^{\alpha}(e) : e \in S)$ или в минимизации этой функции при условии максимальности $\|\alpha\|$ (где $a(e)$ - "удельная стоимость" элемента e). К задаче каждого из этих типов часто добавляют требование целочисленности решения.

Задачи об упаковках комбинаторных объектов имеют широкую сферу приложений. Например, известная в теории передачи информации задача о широковещании интерпретируется как задача об упаковке, в которой пакуемыми объектами являются реберные множества деревьев графа, содержащих данное подмножество узлов. Двойственная задача к задаче о максимальной упаковке ориентированных циклов графа - это, в других терминах, задача об оп-

тимальном устранении контуров в ориентированных сетях. Если в качестве объектов упаковки рассматривать реберные множества цепей, соединяющих определенные пары узлов сети, мы получаем широкий класс многопродуктовых потоковых и транспортных задач.

В настоящей работе исследуются задачи, в которых объектами упаковки служат разрезы неориентированных графов. Задачи такого рода известны как задачи о многопродуктовых разрезах (мы применяем в работе более краткое название - задачи о мультиразрезах). Первоначальное изучение многопродуктовых разрезов проводилось в рамках теории блокирующих многогранников Фалкерсона. Из установленного в этой теории нового типа двойственности задач комбинаторной оптимизации следовала теорема о линейном минимаксе специального вида для задач о максимальной упаковке двухпродуктовых разрезов. Впоследствии для этого класса задач были найдены эффективные алгоритмы решения и была доказана теорема о существовании полуцелочисленного оптимального решения для целочисленных сетей. Были изучены и некоторые другие классы задач. Однако эти исследования были весьма разрозненными, а разработанный в них комбинаторный аппарат был недостаточен для решения более сложных задач об упаковках разрезов.

В работе предпринята попытка построения комбинаторной теории мультиразрезов, исходя из достаточно хорошо развитой к настоящему времени параллельной теории многопродуктовых потоков в неориентированных сетях. Основываясь на принятой классификации задач о многопродуктовых потоках, мы выделяем основные типы задач о мультиразрезах: общую задачу, задачу о максимальном мультиразрезе, задачу о существовании, задачу о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости, а также вспомогательную задачу о запирающем мультиразрезе (раздел 2). Дальнейшая классификация проводится по виду определяющего структурного семейства - так называемой разрезной схемы. В разделе 3 устанавливаются теоремы линейной двойственности для задач каждого типа и вводятся в рассмотрение подклассы задач, для которых двойственные оценки имеют специальный вид. Эти подклассы названы "классами ОКЦ", они характеризуются тем свойством, что ответ каждой из составляющих их задач полностью обусловлен длинами <u>кратчайших цепей</u>, соединяющих пары полюсов сети. Отмечается, что к этим классам принадлежат все изученные ранее зада-

6716

чи о мультиразрезах. Раздел 4 посвящен собственному исследованию "препятствий" (двойственных функций) в задачах о мультиразрезах. Эти препятствия интерпретируются как функции ширины ребер и являются двойственными аналогами метрик - препятствий в задачах о многопродуктовых потоках. В этом разделе устанавливаются достаточные условия простоты (неразложимости) таких функций и выделяются некоторые классы комбинаторных препятствий. В разделе 5 рассматривается вспомогательная задача о запирающем мультиразрезе и приводится теорема, описывающая все ситуации (в "массовых" терминах), когда эта задача имеет решение. Здесь же демонстрируются некоторые приложения такой задачи, в частности, показывается, как с ее помощью получать разложения метрик в неотрицательные линейные комбинации метрик-разрезов. Раздел 6 посвящен изложению комбинаторного алгоритма, строящего полуцелочисленные запирающие мультиразрезы в целочисленных сетях. Этот раздел стоит несколько в стороне от основной линии работы, и его чтение может быть опущено без ущерба для понимания последующего. Основные результаты работы представлены в разделах 7 и 8. Здесь формируются теоремы, дающие полное описание класса ОКЦ для задач о существовании и задач о максимальном мультиразрезе, а также теорема об одной серии задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости этого класса. Здесь также рассматриваются вопросы о дробности решений мультиразрезных задач на целочисленных сетях и приводятся эффективные комбинаторные алгоритмы решения ряда задач. Кроме того, здесь исследуется одна смежная задача, называемая задачей об оптимальном устранении отрицательных циклов в неориентированных сетях. Основные теоремы этих разделов приведены без доказательств либо с частичными доказательствами ввиду ограниченного размера работы.

Следует отметить, что в этой работе мы не преследуем цель осветить прикладные аспекты теории мультиразрезов. Предлагаемое исследование имеет теоретический характер и рассчитано на специалистов в области дискретной математики и математического программирования, интересующихся проблемами теории упаковок и покрытий комбинаторных объектов и смежными вопросами.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

I.I. Пусть $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ и $2\mathbb{Z}$ - множества действительных, целых и четных чисел, соответственно, а $\mathbb{R}_+, \mathbb{Z}_+$ и $2\mathbb{Z}_+$ - подмножества

неотрицательных чисел в этих множествах. Для конечного множества S и числового множества $\mathbb{N}$ будем обозначать через $\mathbb{N}^S$ совокупность всех функций на S со значениями в $\mathbb{N}$.

Неупорядоченная пара различных элементов $x, y \in S$ будет называться <u>ребром</u> (на S) и обозначаться в виде $[xy]$ или $[yx]$; символом $[S]$ будем обозначать совокупность всех ребер на S (таким образом, $(S, [S])$ - это полный неориентированный граф с множеством вершин S). Упорядоченная пара различных элементов $x, y \in S$ называется <u>дугой</u> (на S) и обозначается (xy).

Для пары непустых подмножеств $X, Y \subset S$ таких, что $X \cap Y = \emptyset$, определим множество $[X, Y]$, состоящее из всех ребер в $[S]$ с одним концом в X и другим - в Y. Если $Y = S \setminus X$, то множество $[X, Y]$ называется (неориентированным) <u>разрезом</u> на S. Если из контекста следует, что множество X рассматривается в качестве подмножества множества S, то для $S \setminus X$ может применяться обозначение $\bar{X}$. Поэтому разрез $[X, Y]$ может быть обозначен $[X, \bar{X}]$ или $[Y, \bar{Y}]$. Для заданных функции на ребрах $f \in \mathbb{R}^{[S]}$ и разреза $[X, \bar{X}]$ величина $\sum(f(e) : e \in [X, \bar{X}])$ будет обозначаться в виде $f[X, \bar{X}]$.

Подмножество X в S называют <u>собственным</u>, если $X \neq \emptyset$ и $X \neq S$, совокупность всех собственных подмножеств в S обозначим $]S[$.

Непустая последовательность L различных элементов $x_0, x_1, \dots, x_k$ в S, рассматриваемая с точностью до обращения порядка, называется <u>цепью</u> на S и обозначается в виде $[x_0 x_1 \dots x_k]$ или $[x_k x_{k-1} \dots x_0]$. Для цепи $L = [x_0 x_1 \dots x_k]$ определим множество ребер $E_L = \{[x_i x_{i+1}] : i \in \overline{0, k-1}\}$ и ребер из концевых элементов $u_L = [x_0 x_k]$. Пусть $\mathcal{L}^S$ обозначает множество всех цепей на S. Для фиксированного подмножества вершин $T \subseteq S$ (подмножества ребер $U \subseteq [S]$) определим множество цепей $\mathcal{L}^{S,T}$ в $\mathcal{L}^S$ с обоими концами в T (соответственно, множество цепей $\mathcal{L}^{S,U} = \{L \in \mathcal{L}^S : u_L \in U\}$). Цепь $L \in \mathcal{L}^{S,T}$ назовем <u>правильной</u>, если множеству T принадлежат только концевые элементы в L; множество всех правильных цепей для S и T обозначим $\tilde{\mathcal{L}}^{S,T}$.

Аналогичная последовательность C элементов $x_0, x_1, \dots, x_k$ при $k \geq 3$ и $x_k = x_0$ называется (неориентированным) <u>циклом</u> на S. Для цикла C подобным образом вводится множество ребер E_C .

Пусть $\theta^S_{S'}$ обозначает характеристическую функцию подмножества $S' \subseteq S$, т.е. $\theta^S_{S'}(s)$ равно 1 для $s \in S'$ и равно 0 для $s \in S \setminus S'$. Для характеристических функций следующих типов подмножеств будут применяться специальные обозначения: (а) для $X \in]S[$ характеристическая функция $\theta^{[S]}_{[X,\bar{X}]}$ разреза $[X,\bar{X}]$ будет обозначаться в виде ϱ^S_X , (б) для цепи (цикла) L функция $\theta^{[S]}_{E_L}$ обозначается θ_L .

Носитель $\{s \in S : f(s) \neq 0\}$ функции f на S обозначается $\mathrm{supp}(f)$.

1.2. В дальнейшем мы будем фиксировать некоторое основное множество V , его подмножество T, $|T| \geq 2$, и совокупность собственных подмножеств $CS \subseteq]T[$. Объект $N = (V,T,\ell)$, где $\ell \in R^{[V]}_+$, назовем <u>разрезной сетью</u>, или просто <u>сетью</u>. Множества V и T считаются, соответственно, множествами <u>вершин</u> и <u>терминалов</u> (или <u>полюсов</u>), а функция ℓ - функцией <u>длин</u> ребер сети N .

Обозначим через $]V,CS[$ множество $\{X \subset V : X \cap T \in CS\}$. Всякая функция $\alpha :]V,CS[\to R_+$ называется <u>мультиразрезом</u> на V с <u>разрезной схемой</u> (или просто <u>схемой</u>) CS . Для мультиразреза α вводятся следующие основные характеристики:

а) <u>Функция нагрузки</u> (на ребра) $\lambda^\alpha \in R^{[V]}_+$, определяемая как

$$\lambda^\alpha = \sum(\alpha_X \varrho^V_X : X \in]V,CS[) \qquad (\text{т.е. } \lambda^\alpha(e) = \sum(\alpha_X : X \in]V,CS[,\ e \in [X,\bar{X}]),\ e \in [V]) ;$$

б) <u>Функция мощности</u> $\delta^\alpha \in R^{CS}_+$, определяемая как

$$\delta^\alpha_A = \sum(\alpha_X : X \subset V,\ X \cap T = A) \qquad \text{для} \quad A \in CS \ ;$$

в) <u>Общая мощность</u> $\|\alpha\| \overset{\text{def}}{=} \sum(\delta^\alpha_A : A \in CS) = \sum(\alpha_X : X \in]V,CS[)$.

Мультиразрез α называется <u>допустимым</u> в сети $N = (V,T,\ell)$, если выполняется условие упаковки

$$\lambda^\alpha \leq \ell \quad (\text{т.е. } \lambda^\alpha(e) \leq \ell(e) \ \text{ для всех } \ e \in [V] \ ). \qquad (1.1)$$

Как правило, мы будем иметь дело с допустимыми мультиразрезами, и эпитет "допустимый" будет опускаться.

Разрезная схема CS (а также мультиразрез $\alpha :]V,CS[\to R_+$) называются <u>полными</u>, если $CS =]T[$. В этом случае

для множества $]V,CS[$ применяется обозначение $]V,T[$.

Сеть (V,T,ℓ) называется <u>целочисленной</u>, если $\ell \in Z^{[V]}_+$.

1.3. В предыдущем разделе мы дали определение мультиразреза в <u>функциональной</u> форме. Эта форма является наиболее подходящей для тех исследований, которые проводятся в данной работе. Однако в ряде случаев бывает полезно использовать другие формы задания мультиразреза.

Под мультиразрезом на V с разрезной схемой $CS \subseteq]T[$, заданным в <u>комбинаторной</u> форме, понимается семейство Q подмножеств множества V (с возможными повторениями), в котором для каждого подмножества $X \in Q$ справедливо $X \cap T \in CS$. Функция нагрузки λ^Q определяется как

$$\lambda^Q(e) = |\{X \in Q : e \in [X,\bar{X}]\}|, \quad e \in [V],$$

а функция мощности δ^Q - как

$$\delta^Q_A = |\{X \in Q : X \cap T = A\}|, \quad A \in CS .$$

Эта форма используется для целочисленных мультиразрезов. Очевидно, Q эквивалентно целочисленному функциональному мультиразрезу $\alpha :]V,CS[\to Z_+$, для которого $\alpha_X = |\{X' \in Q : X' = X\}|$ для каждого $X \in]V,CS[$. Комбинаторная форма задания мультиразреза будет использоваться в разделе 6.

Под мультиразрезом на V с разрезной схемой $CS \subseteq]T[$, заданным в форме <u>потенциалов</u>, понимается набор чисел $\{\pi_A(x) \in R : A \in CS,\ x \in V\}$ (потенциалов вершин), таких, что для каждого $A \in CS$ справедливо $\pi_A(s) = \Pi^1_A$ $(s \in A)$, $\pi_A(t) = \Pi^2_A$ $(t \in T \setminus A)$, $\Pi^1_A \leq \Pi^2_A$ и $\Pi^1_A \leq \pi_A(z) \leq \Pi^2_A$ $(z \in V \setminus T)$. Для такого мультиразреза π функция нагрузки λ^π определяется как

$$\lambda^\pi(xy) = \sum(|\pi_A(x) - \pi_A(y)| : A \in CS), \quad (xy) \in [V],$$

а функция мощности δ^π - как $\delta^\pi_A = \Pi^2_A - \Pi^1_A$, $A \in CS$.

Мультиразрез π может быть преобразован в эквивалентный функциональный мультиразрез α следующим образом. Пусть $\Pi^1_A = \tau^1_A < \tau^2_A < \ldots < \tau^{m(A)}_A = \Pi^2_A$ - последовательность различных потенциалов (для каждого $A \in CS$). Положим $X(A,i) = \{x \in V : \pi_A(x) \leq \tau^i_A\}$, $i = 1,\ldots,m(A)-1$. Тогда α определяется как $\alpha_{X(A,i)} = \tau^{i+1}_A - \tau^i_A$, $A \in CS$, $i = 1,\ldots,m(A)-1$, и $\alpha_X = 0$ - для остальных X в $]V,CS[$. Легко видеть, что $\lambda^\alpha = \lambda^\pi$ и $\delta^\alpha = \delta^\pi$

6716

Очевидно, мультиразрез α , определенный таким образом, является, вообще говоря, не единственным функциональным мультиразрезом, эквивалентным π . Обратно, для произвольного функционального мультиразреза α эквивалентный мультиразрез π может быть определен как $\pi_A(s)=0\ (s\in A)$ и $\pi_A(x)=$ $=\sum(\alpha_X : X\subset V, X\cap T=A, x\in V\setminus X)$ $(x\in V\setminus A)$ для каждого $A\in CS$. Можно убедиться, что указанный способ определяет единственный (с точностью до константы) мультиразрез π , эквивалентный α .

Мультиразрезы в форме потенциалов в данной работе встречаются только в разделах 2.2 и 3.4.

2. ЗАДАЧИ О МУЛЬТИРАЗРЕЗАХ

2.I. В этом разделе мы выделяем основные типы задач о мультиразрезах. Задачи этих типов характеризуются тем общим обстоятельством, что в них накладываются условия только на функцию нагрузки λ^α и функцию мощности δ^α , причем эти условия – линейные. Проводя классификацию задач о мультиразрезах, мы исходим из аналогичной классификации для задач о многопродуктовых потоках в неориентированных сетях, которая введена в работах [3,5,8] .

А. Задача о существовании $EX(V,CS,\ell,d)$ – для заданных сети $N=(V,T,\ell)$, схемы $CS\subseteq]T[$ и функции "требований на мощности" $d\in\mathbb{R}_+^{CS}$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha :]V,CS[\to\mathbb{R}_+$ (т.е. удовлетворяющий условию (I.I)), для которого

$$\delta^\alpha \geq d \qquad (2.I)$$

или установить отсутствие такого мультиразреза.

Б. Задача о максимальном мультиразрезе (сокращенно, задача на max-Σ) $\Sigma(V,CS,\ell)$ – для заданной сети $N=(V,CS,\ell)$ и схемы $CS\subseteq]T[$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha :]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, общая мощность которого $\|\alpha\|$ – максимальная.

Для сети $N=(V,T,\ell)$ и схемы CS максимальную возможную величину $\|\alpha\|$ будем обозначать $\Sigma^{N,CS}$

В. Задача о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости $COST(V,CS,\ell,a)$ – для сети $N=(V,T,\ell)$, схемы $CS\subseteq]T[$ и функции "стоимости ребер" $a\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha :]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, для которого $\|\alpha\|=\Sigma^{N,CS}$ и при этом величина $a\cdot\lambda^\alpha$ – минимальная.

(Для произвольных $f,g\in\mathbb{R}^S$ $f\cdot g$ обозначает величину $\Sigma(f(s)g(s) : s\in S)$.)

Г. Общая задача $GEN(V,CS,\ell,d,b,a)$ – для заданной сети (V,T,ℓ) и функций $d,b\in\mathbb{R}_+^{CS}$, $a\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ требуется построить допустимый мультиразрез $\alpha :]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющий (2.I) и максимизирующий величину $b\cdot\delta^\alpha - a\cdot\lambda^\alpha$ (здесь величина $a(e)$ интерпретируется как "стоимость" использования единицы длины ребра e ; b_A – как "премия" за упаковку разреза $[X,\bar X]$ единичного веса такого, что $X\cap T=A\ (A\in CS)$; d – функция требований на мощности; величина $b\cdot\delta^\alpha - a\cdot\lambda^\alpha$ – это "доход" от мультиразреза α).

2.2. Обычно задачи об упаковках разрезов формулируются на графах: для данного неориентированного графа $G=(V,E)$ (с множеством вершин V и множеством ребер E), некоторого множества его разрезов $\mathcal{C}$ и функции ℓ на множестве ребер E требуется найти функцию α на $\mathcal{C}$, удовлетворяющую условию упаковки и обладающую определенными дополнительными свойствами. Любую такую задачу можно переформулировать в виде задачи об упаковке разрезов на сети $(V,T,\tilde\ell)$, доопределив функцию $\tilde\ell$ на множестве ребер $[V]\setminus E$ достаточно большими числами и подобрав некоторое множество полюсов T . Выбор сетей (V,T,ℓ) в качестве основного объекта для изучения задач об упаковках разрезов оказывается наиболее удобным для формулировок и доказательств теорем двойственности, о которых пойдет речь в разделе 3.

Рассмотрим два примера задач о мультиразрезах.

Пример I. Наиболее простым примером задачи о мультиразрезах является задача о максимальной упаковке "однопродуктовых" разрезов. Эта задача была поставлена и решена в [20] . В наших терминах – это задача на max-Σ $\Sigma(V,CS_1,\ell)$ в сети $N=$ $=(V,T,\ell)$ с множеством полюсов $T=\{s,t\}$ и разрезной схемой $CS_1=\{\{s\}\}$. Как показано в [20] , Σ^{N,CS_1} равно длине кратчайшей цепи, соединяющей s и t . Действительно, определим расстояние $\mu_\ell(s,x)$ от s до произвольной вершины x как минимум из длин всевозможных цепей, соединяющих s и x . Тогда для мультиразреза π (в форме потенциалов), определенного как $\pi(s)=0$, $\pi(x)=\mu_\ell[sx]$ $(x\in V\setminus\{s\})$ справедливо $\lambda^\pi\le\ell$ и $\|\pi\|=\delta^\pi_{\{s\}}=\mu_\ell[st]$; таким образом, $\Sigma^{N,CS_1}=$ $=\mu_\ell[st]$ (в силу очевидного $\Sigma^{N,CS_1}\le\mu_\ell[st]$). Для целочисленной сети указанный мультиразрез - также целочисленный.

Пример 2. Другим изученным примером является задача о максимальной упаковке "двухпродуктовых" разрезов. В наших терминах - это задача $\Sigma(V,CS_2,\ell)$, где $T=\{s,t,p,q\}$, $CS_2=\{\{s,p\},\{s,q\}\}$ (т.е. требуется найти максимальную упаковку разрезов, которым принадлежат оба ребра $[st]$ и $[pq]$, см. рис. 2.I). Известно, что для рассматриваемой задачи справедливо $\Sigma^{N,CS_2}=\min\{\mu_\ell[st],\mu_\ell[pq]\}$ (это следует из неравенства длины-ширины Лемана [I6] (или из теоремы Фалкерсона о блокирующих многогранниках [I2]) и теоремы Ху о двухпродуктовых потоках [I3]) . Сеймур [2I] конструктивно доказал более сильную теорему: если сеть N - целочисленная и величина $\ell_C\overset{def}{=}\Sigma(\ell(e):e\in E_C)$ - четна для любого цикла C на V , то равенство $\|\alpha\|=\min\{\mu_\ell[st],\mu_\ell[pq]\}$ достигается для целочисленного мультиразреза α . Наконец, Певзнер [10] предложил полиномиальный алгоритм решения данной задачи при произвольных длинах ребер, гарантирующий полуцелочисленность решения для целочисленных сетей.

2.3. Классы задач с фиксированной разрезной схемой. Множества задач каждого из типов A, $Б$ и B , введенных в 2.2, естественно классифицируются по виду разрезной схемы.

Пусть $EX(CS),\Sigma(CS),COST(CS)$ обозначают, соответственно, совокупности всех задач $EX(V,CS,\ell,d)$, $\Sigma(V,CS,\ell)$, $COST(V,CS,\ell,a)$ с фиксированными T и $CS\subseteq]T[$ и всевозможными $V\supseteq T$, $\ell\in R^{[V]}_+$, $d\in R^{CS}_+$, $a\in R^{[V]}_+$.

Например, рассмотренные в примере I задачи о максимальной упаковке однопродуктовых разрезов образуют класс $\Sigma(CS_1)$ с $T=\{s,t\}$ и $CS_1=\{\{s\}\}$, а задачи из примера 2 - класс $\Sigma(CS_2)$ с $T=\{s,t,p,q\}$, $CS_2=\{\{s,p\},\{s,q\}\}$.

Схемы $CS,CS'\subseteq]T[$ назовем эквивалентными, если для каждого $A\in CS$ справедливо $A\in CS'$ или $T\setminus A\in CS'$, и наоборот. Схема CS считается неизбыточной, если из $A\in CS$ следует $T\setminus A\notin CS$. Легко видеть, что задача каждого из типов A $Б$ и B , определенных в 2,2 , равносильна задаче с неизбыточной эквивалентной схемой (например, вместо задачи $EX(V,CS,\ell,d)$

можно рассматривать задачу $EX(V,CS',\ell,d')$, где CS' - произвольная неизбыточная схема, эквивалентная CS, и d'_A $(A\in CS')$ определяется как $d'_A=d_A$, если $A\in CS$ и $T\setminus A\notin CS$, $d'_A=d_{T\setminus A}$, если $T\setminus A\in CS$ и $A\notin CS$, и $d'_A=d_A+d_{T\setminus A}$, если $A,T\setminus A\in CS$). В дальнейшем, рассматривая класс задач с фиксированной разрезной схемой CS , мы, если надо, будем изменять эту схему, оставляя ее эквивалентной.

2.4. Задача о запирающем мультиразрезе. Эта задача, не укладывающаяся в классификацию, данную в 2.2 , оказывается полезной при решении ряда задач о мультиразрезах основных типов. Пусть $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$ - допустимый мультиразрез в сети (V,T,ℓ). Положим

$$\varkappa^\alpha=\lambda^\alpha|_{[T]}\,. \tag{2.2}$$

Для произвольной цепи $L\in\mathcal{L}^{V,T}$, $u_L=[st]$, ввиду допустимости α имеем

$$\left.\begin{aligned}&\ell_L\ (\overset{def}{=}\Sigma(\ell(e):e\in E_L)\ge\Sigma(\lambda^\alpha(e):e\in E_L)=\Sigma(\alpha_X\,|[X,\bar X]\cap E_L|:\\&X\in]V,CS[)\ge\Sigma(\alpha_X:X\in]V,CS[,\ [st]\in[X,\bar X])=\lambda^\alpha[st]=\varkappa^\alpha[st].\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Следовательно, $\varkappa^\alpha[st]\le\mu_\ell[st]$, где $\mu_\ell[st]=\min\{\ell_L: L\in\mathcal{L}^V, u_L=[st]\}$. Функцию $\varkappa^\alpha$ назовем функцией запирания для α . Пусть теперь задано некоторое подмножество ребер $U\subseteq[T]$. Скажем, что α запирает ребро $[st]\in U$, если

$$\varkappa^\alpha[st]=\mu_\ell[st], \tag{2.4}$$

и запирает множество U , если равенство (2.4) выполняется для любого $[st]\in U$.

Задача о запирающем мультиразрезе $LOCK(V,U,\ell)$ состоит в построении в сети (V,T,ℓ) допустимого полного мультиразреза $\alpha:]V,T[\to\mathbb{R}_+$, запирающего заданное множество U , или в доказательстве, что такого мультиразреза не существует.

Определение. Граф $H=(T,U)$ называется запираемым, если задача $LOCK(V,U,\ell)$ имеет решение при любых $V\supseteq T$ и $\ell\in R^{[V]}_+$.

Для фиксированного $H=(T,U)$ совокупность задач $LOCK(V,U,\ell)$ при всевозможных $V\supseteq T$ и $\ell\in R^{[V]}_+$ обозначим $LOCK(H)$.

В разделе 5 мы докажем теорему, дающую полное описание запираемых графов (теорема 5.I), а в разделе 6 опишем алгоритм нахождения полуцелочисленного решения задачи $LOCK(V,U,\ell)$ для произвольной целочисленной функции ℓ и запираемого графа $H=(T,U)$. Некоторые следствия теоремы 5.I и этого алгоритма будут продемонстрированы в разделе 5.1: будут получены алгоритмы решения задач о двухпродуктовых мультиразрезах (на max-Σ и о существовании) для целочисленных сетей, будут найдены достаточные условия разложимости метрики в неотрицательную линейную комбинацию метрик-разрезов.

Для индивидуальных задач $LOCK(V,U,\ell)$ (быть может, с незапираемым графом $H=(T,U)$ мы в состоянии указать лишь общие условия разрешимости, следующие из леммы Фаркаша; эти условия демонстрируют двойственную связь задачи о запирающем мультиразрезе с некоторым классом задач о многопродуктовых потоках в неориентированных сетях (замечание 5.1 в разделе 5.4).

2.5. Сеймур [22] рассмотрел одну задачу об упаковках разрезов, которая по виду очень похожа на задачу о запирающем мультиразрезе. Приведем несколько иную, но эквивалентную, постановку этой задачи (это относится и к теореме 2.1).

<u>Задача S.</u> Пусть для полного графа $(V,[V])$ заданы функция длины ребер $\ell\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ и подмножество ребер $U\subseteq[V]$; требуется найти такую функцию $\alpha\in\mathbb{R}_+^{2^V}$, что

$$\text{из } \alpha_X>0 \text{ следует } |[X,\bar X]\cap U|=1, \tag{2.5}$$

$$\Sigma(\alpha_X : X\subset V,\ e\in[X,\bar X]) \begin{cases} \le \ell(e), & e\in[V]\setminus U,\\ =\ell(e), & e\in U. \end{cases} \tag{2.6}$$

<u>Теорема 2.1 [22]</u>. Следующие утверждения эквивалентны:
(i) задача S имеет решение;
(ii) для любого простого цикла C на V справедливо

$$\Sigma(\ell(e): e\in E_C\cap U) \le \Sigma(\ell(e): e\in E_C\setminus U). \tag{2.7}$$

Из неравенств (2.7) легко следует $\mu_\ell(e)=\ell(e)$ для любого $e\in U$. Поэтому фактически задача S отличается от задачи $LOCK(V,U,\ell)$ только наложением дополнительного условия (2.5). Однако, несмотря на близость постановок, эти задачи оказываются весьма различными. Расширенный вариант задачи S будет рассмотрен в разделе 8 в общем контексте задач на max-Σ , там же будет показано, что к этому варианту сводится задача об оптимальном устранении отрицательных циклов в неориентированных взвешенных графах.

В примечании к работе [22] указывается, что теорема 2.1 имеет более сильную, полуцелочисленную, форму. В разделе 8.3

мы покажем, что при помощи теоремы 2.1 можно доказать следующую теорему: если ℓ - целочисленная функция, и для любого простого цикла C величина $\Sigma(\ell(e): e\in E_C\setminus U)-\Sigma(\ell(e): e\in E_C\cap U)$ - неотрицательная и четная, то задача S имеет целочисленное решение (теорема 8.2).

2.6. В этом разделе мы приведем некоторые сведения о многопродуктовых потоках в неориентированных сетях, которые будут полезны для дальнейшего. Мы будем в основном придерживаться терминологии работ [3,5,8] .

Под неориентированной <u>потоковой сетью</u> (или просто сетью) понимается объект $N=(V,T,w)$, где V - множество вершин, $T\subseteq V$ - множество полюсов и $w\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ - функция пропускной способности ребер, а под <u>потоковой схемой</u> - некоторый неориентированный граф $FS=(T,U)$. Допустимым мультипотоком для N и FS называется функция $\varphi: \mathcal{L}^{V,U}\to\mathbb{R}_+$, для которой выполняются ограничения по пропускным способностям

$$\Sigma(\varphi_L : L\in\mathcal{L}^{V,U},\ e\in E_L)\le w(e),\quad e\in[V], \tag{2.8}$$

(следуя [5,8] , мы применяем сокращенный термин "мультипоток" вместо "многопродуктовый поток").

Следующие две задачи хорошо известны (мы приводим их в эквивалентных формулировках).

<u>Мультипотоковая задача о существовании</u> $EX^f(V,U,w,d)$ состоит в построении для данных (V,T,w), $FS=(T,U)$, $d\in\mathbb{R}_+^U$ допустимого мультипотока $\varphi: \mathcal{L}^{V,U}\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющего требованиям

$$\Sigma(\varphi_L : L\in\mathcal{L}^{V,U},\ u_L=u)\ge d(u),\quad u\in U. \tag{2.9}$$

<u>Мультипотоковая задача на</u> max-Σ $\Sigma^f(V,U,w)$ состоит в построении для данных (V,T,w) и $FS=(T,U)$ допустимого мультипотока $\varphi: \mathcal{L}^{V,U}\to\mathbb{R}_+$, максимизирующего величину $\|\varphi\|=\Sigma(\varphi_L: L\in\mathcal{L}^{V,U})$.

<u>Теорема 2.2.</u> Задача о существовании $EX^f(V,U,w,d)$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой метрики μ на V справедливо

$$\Sigma(\mu(u)d(u): u\in U)\le \mu\cdot w \tag{2.10}$$

(метрика μ на V - это функция на множестве ребер $[V]$, удовлетворяющая неравенству треугольника $\mu[x,y]+\mu[y,z]\ge\mu[x,z]$,

67I6

для любых различных $x,y,z\in V$).

Эта теорема была впервые сформулирована в [9] и получила комбинаторное доказательство в [8]. Первоначальный критерий разрешимости данной задачи (справедливый и для ориентированных сетей) имел несколько иной, но близкий, вид; он был сформулирован в [I9] и строго доказан в [I5].

Теорема 2.3 [8]. Для сети $N=(V,T,w)$ и потоковой схемы $FS=(T,U)$ справедливо

$$\max\{\|\varphi\|\}\ (\overset{def}{=}\Sigma^{N,FS}) = \min\{\mu\cdot w\},$$

где максимум берется по всем допустимым мультипотокам $\varphi:\Sigma^{V,U}\to R_+$, а минимум – по всем метрикам μ на V, таким, что $\mu(u)=1$ для любого $u\in U$.

Из классической теоремы Форда-Фалкерсона [10] следует, что для разрешимости задачи $EX^f(V,U,w,d)$ необходимо, чтобы для любого разреза $[X,\bar X]$ на V выполнялось

$$\Sigma\,(d(u): u\in U\cap[X,\bar X]) \le w[X,\bar X]. \qquad (2.II)$$

Неравенство (2.II) является частным случаем неравенства (2.I0) при $\mu=\rho_X^V$ (ρ_X^V является метрикой и называется метрикой-разрезом). Выполнение неравенства (2.II) для всех разрезов $[X,\bar X]$ является необходимым (но, вообще говоря, не достаточным) условием разрешимости задачи. Полное описание (в "хороших" комбинаторных терминах) класса задач $EX^f(V,U,w,d)$, разрешимых при выполнении неравенств (2.II), – неизвестно (и, по-видимому, вряд ли может быть получено). Однако в терминах потоковых схем ответ дает следующая теорема Папернова.

Теорема 2.4 [9]. Пусть $FS=(T,U)$ – граф, не содержащий изолированных вершин. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) для любых $V\supseteq T$, $w\in R_+^{[V]}$ и $d\in R_+^{U}$ задача $EX^f(V,U,w,d)$ – разрешима, если неравенства (2.II) справедливы для любого разреза $[X,\bar X]$ на V;

(ii) $FS\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, – где K_4 – полный граф на четырех вершинах, C_5 – цикл на пяти вершинах, $\mathfrak{X}^2$ – множество всех графов, представимых в виде объединения двух звезд (рис. 2.2).

(В [I7] приведено усиление утверждения (i) этой теоремы, являющееся следствием алгоритма трудоемкости

$O(P(|V|)\,w[V])$ (где $P(n)$ – некоторый полином и $w[V]=\Sigma\,(w(e): e\in[V])$) : пусть $FS\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, функции w и d – целочисленные, и пусть величина $w[X,\bar X]-\Sigma\,(d(u): u\in U\cap[X,\bar X])$ – неотрицательная и четная для любого $X\subset]V[$, тогда задача $EX^f(V,U,w,d)$ имеет целочисленное решение. В [3] приводится алгоритм решения произвольной задачи для $FS\in\{K_4\}\cup\{C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, имеющий трудоемкость $O(|V|^5)$ (при целочисленных w и d он находит полуцелочисленное решение). Частным случаем теоремы 2.4 является хорошо известная теорема Ху [I4] о существовании двухпродуктового потока с заданными мощностями (в этом случае FS – паросочетание из двух ребер, принадлежащее множеству $\mathfrak{X}^2$). Диниц обобщил теорему Ху на произвольные $FS\in\mathfrak{X}^2$ (см. [I]). Независимое доказательство для $FS=K_4$ дано в [23].

Аналогичный вопрос был поставлен для задач на $max\text{-}\Sigma$: при каких $N=(V,T,w)$ и $FS=(T,U)$ величина $\Sigma^{N,FS}$ зависит только от пропускных способностей минимальных разрезов сети, т.е. справедливо

$$\Sigma^{N,FS} = \min\{\Sigma\,(\beta_A\nu_A^w : A\in]T[)\} \qquad (2.I2)$$

где минимум берется по всем $\beta\in R_+^{]T[}$ таким, что $\Sigma\,(\beta_A: u\in[A,T\setminus A])=1$ для каждого $u\in U$, а ν_A^w обозначает величину $\min\{w[X,\bar X]: X\subset V,\ X\cap T=A\}$. Как и для предыдущей задачи, ответ найден только в терминах потоковых схем. Перед тем, как сформулировать этот результат, введем некоторые определения, которые понадобятся и в дальнейшем.

Два подмножества X,Y множества S называются трансверсальными, если непусто каждое из четырех множеств $X\cap Y$, $X\setminus Y$, $Y\setminus X$ и $S\setminus(X\cup Y)$, и называются параллельными – в противном случае (эти термины были введены в [2]). Совокупность $\mathcal{D}$ собственных подмножеств в S называется i-зацепленной (для $i\ge 2$), если в $\mathcal{D}$ имеется подсемейство $\mathcal{D}'$, состоящее из i попарно трансверсальных множеств. 2-незацепленная совокупность называется параллельной.

Пусть $\mathcal{A}(FS)$ обозначает совокупность всех максимальных по включению независимых подмножеств вершин в $FS=(T,U)$ (подмножество вершин называется независимым, если никакие две его вершины – не смежны). Скажем, что граф FS – четен (относительно независимых множеств), если все циклы гиперграфа $\mathcal{A}(FS)$ – четные.

<u>Теорема 2.5</u> [5,6]. Пусть $FS=(T,U)$ – граф без изолированных вершин.

а) Если множество $\mathcal{A}(FS)$ – 3-незацепленное, то для любых $V \supseteq T$ и $w \in R_+^{[V]}$ справедливо минимаксное равенство (2.12). Если при этом $w \in \mathbb{Z}_+^{[V]}$, то задача $\Sigma^f(V,U,w)$ имеет четвертьцелочисленное решение, и имеет полуцелочисленное решение, когда граф FS – четен.

б) Если множество $\mathcal{A}(FS)$ – 3-зацепленное, $V \supset T$ и $|V| \geq |T| + 4$, то существует функция $w \in R_+^{[V]}$, для которой (2.12) – не верно.

Доказательство утверждения (а) этой теоремы следует из алгоритма, изложенного в [5] (подробное описание приводится в [3]), а доказательство утверждения (б) дается в [6]. Заметим, что найденные доказательства как для (а), так и для (б) – весьма сложные.

Задачи $EX^f(FS)$ и $\Sigma^f(FS)$ со схемами FS, указанными в теоремах 2.4 и 2.5, соответственно, называются принадлежащими классу ОМР (задачи, определяемые минимальными разрезами сети).

2.7. В разделе 3 будет доказана теорема двойственности для общей мультиразрезной задачи $GEN(V,CS,\ell,d,b,a)$, исходя из которой будут получены теоремы двойственности для задач на max-Σ и задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости, а также теорема о разрешимости для задач о существовании. Для этих задач "препятствия" (т.е. функции, дающие точную оценку оптимума или необходимые и достаточные условия разрешимости) названы функциями <u>ширины</u> (по аналогии с метриками или функциями расстояний, являющимися "препятствиями" в задачах о мультипотоках). Собственному исследованию функций ширины (описанию достаточных условий их неразложимости) посвящен раздел 4. В разделе 3 для рассматриваемых типов задач о мультиразрезах определяются классы ОКЦ (классы задач, решение которых зависит только от длин кратчайших цепей, соединяющих полюса сети). Двойственными препятствиями для задач этих классов являются функции ширины специального вида, а именно, характеристические функции ребер правильных цепей. В разделе 7 мы дадим полное описание (в терминах разрезных схем) класса ОКЦ для задач о существовании, а в разделе 8 – класса ОКЦ для задач на max-Σ.

3. ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ МУЛЬТИРАЗРЕЗОВ

3.1. Пусть $w \in R_+^{[V]}$ – некоторая функция, интерпретируемая нами как <u>функция ширины</u> ребер. Для каждого $A \in]T[$ определим величину

$$\nu_A^w = \min\{w[X,\bar{X}] : X \subset V,\ X \cap T = A\}, \qquad (3.1)$$

т.е. функция $\nu^w \in R_+^{]T[}$ может рассматриваться как функция пропускных способностей соответствующих минимальных разрезов потоковой сети (V,T,w).

<u>Предложение 3.1</u>. Если $w, w', w'' \in R_+^{[V]}$ и $w = w' + w''$, то $\nu^w \geq \nu^{w'} + \nu^{w''}$.

Доказательство очевидно □

Скажем, что функция $w \in R_+^{[V]}$ имеет <u>CS-разложение</u> $\{w', w''\}$ (где $w', w'' \in R_+^{[V]}$), если $w = w' + w''$ и $\nu^w|_{CS} = (\nu^{w'} + \nu^{w''})|_{CS}$. Функция w называется <u>CS-простой</u>, если для любого ее CS-разложения $\{w', w''\}$ функции w' и w'' – пропорциональны[*], т.е. существуют множители $\beta', \beta'' \geq 0$, такие, что $w' = \beta' w$, $w'' = \beta'' w$.

3.2. Рассмотрим общую задачу о мультиразрезах $GEN(V, CS, \ell, d, b, a)$. Она может быть записана в виде следующей линейной программы:

$$\sum(\alpha_X \rho_X^V : X \in]V,CS[) \leq \ell, \qquad (3.1)$$

$$-\sum(\alpha_X : X \subset V,\ X \cap T = A) \leq -d_A, \quad A \in CS, \qquad (3.2)$$

$$\alpha \in R_+^{]V,CS[}, \qquad (3.3)$$

$$\sum_{A \in CS} b_A \sum(\alpha_X : X \subset V,\ X \cap T = A) - a \cdot \sum(\alpha_X \rho_X^V : X \in]V,CS[) \to \max. \qquad (3.4)$$

Обозначим двойственный вектор для (3.1) через $\psi \in R_+^{[V]}$ и для (3.2) – через $\gamma \in R_+^{CS}$. Выпишем задачу, двойственную к (3.1) – (3.4) (в векторном виде):

$$\psi[X,\bar{X}] - \gamma_A \geq b_A - a[X,\bar{X}], \qquad X \subset V,\ A \in CS,\ X \cap T = A, \quad (3.5)$$

$$\psi \in R_+^{[V]}, \quad \gamma \in R_+^{CS}, \qquad (3.6)$$

$$\ell \cdot \psi - d \cdot \gamma \to \min. \qquad (3.7)$$

Обозначим функцию $\psi + a$ через w. Из (3.5) следует $\nu_A^w \geq \gamma_A + b_A$ для всех $A \in CS$. Таким образом, (3.5) – (3.7) приводится к следующему эквивалентному виду:

$$w \geq a,\qquad (3.8)$$

$$\nu^w|_{CS} \geq b,\qquad (3.9)$$

$$\ell\cdot(w-a) - d\cdot(\nu^w|_{CS} - b) \to \min.\qquad (3.10)$$

Применяя теорему двойственности линейного программирования задачам (3.1) - (3.4) и (3.5) - (3.7), получаем следующую теорему.

Теорема 3.1.

$$\max\{-\infty,\ b\cdot\delta^\alpha - a\cdot\lambda^\alpha\} = \min\{\ell\cdot(w-a) - d\cdot(\nu^w|_{CS} - b)\},\qquad (3.11)$$

где максимум берется по всем мультиразрезам $\alpha :]V,CS[\to R_+$, таким, что $\lambda^\alpha \leq \ell$ и $\delta^\alpha \geq d$, а минимум - по всем функциям $w \in R_+^{[V]}$ таким, что $w \geq a$ и $\nu^w|_{CS} \geq b$ □

3.3. Для задачи о существовании $EX(V,CS,\ell,d)$ из теоремы 3.1 мы сразу же получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. Задача $EX(V,CS,\ell,d)$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой функции $w\in R_+^{[V]}$ выполняется

$$\ell\cdot w - d\cdot\nu^w|_{CS} \geq 0 \quad \square \qquad (3.12)$$

Если функция ширины w имеет CS-разложение $\{w_1, w_2\}$, то при выполнении неравенств $\ell\cdot w_i - d\cdot\nu^{w_i}|_{CS}\geq 0,\ i=1,2$, выполняется и (3.12). Таким образом справедливо

Следствие 3.2. Задача $EX(V,CS,\ell,d)$ разрешима тогда и только тогда, когда для любой CS-простой функции w выполняется неравенство (3.12) □

Используя средства линейного программирования, легко показать, что для фиксированных V и CS число CS-простых функций (рассматриваемых с точностью до пропорциональности) - конечное. Можно показать также, что для каждой CS-простой функции w' существуют такие $\ell\in R_+^{[V]}$ и $d\in R_+^{CS}$, что неравенства (3.12) выполняются для всех CS-простых функций w, не пропорциональных w', а для $w=w'$ это неравенство нарушается. Таким образом, если на ℓ и d не наложено никаких дополнительных условий, то для установления разрешимости задачи $EX(V,CS,\ell,d)$ необходимо и достаточно убедиться в справедливости конечного числа неравенства (3.12) для всех (с точностью до пропорциональности) простых функций.

В разделе 4 мы рассмотрим некоторые виды CS-простых функций ширины. В частности, CS-простой функцией является функция $w=\theta_L$, где $L\in\mathfrak{L}^{V,T}$ - правильная цепь (определение см. в разделе 1), такая, что $u_L\in[A,T\setminus A]$ для некоторого $A\in CS$. Для такой функции w справедливо $\nu_A^w=1$ при $u_L\in[A,T\setminus A]$ и $\nu_A^w=0$ - в противном случае, и неравенство (3.12) принимает вид

$$\ell_L - \sum(d_A : A\in CS,\ u_L\in[A,T\setminus A]) \geq 0.\qquad (3.13)$$

Для произвольного $u\in[T]$ рассмотрим неравенство

$$\mu_\ell(u) \geq \sum(d_A : A\in CS,\ u\in[A,T\setminus A]).\qquad (3.14)$$

Очевидно, из выполнения неравенства (3.14) следует справедливость (3.13) для любой правильной цепи L, такой, что $u_L=u$. Легко показать обратное: при выполнении (3.13) для всех $L\in\mathfrak{L}^{V,T}$ неравенства (3.14) справедливы для всех $u\in[T]$.

Определение. Скажем, что схема $CS\subseteq]T[$ (а также множество задач $EX(CS)$) принадлежит классу ОКЦ относительно задач о существовании (или, сокращенно, EX-ОКЦ-классу), если задача $EX(V,CS,\ell,d)$ имеет решение для любого $V\supseteq T$ и любых $\ell\in R_+^{[V]}$ и $d\in R_+^{CS}$, удовлетворяющих неравенству (3.14) для всех $u\in[T]$.

("Класс ОКЦ" - это сокращение от "класс схем, для которых ответ любой задачи полностью обусловлен длинами кратчайших цепей, соединяющих полюса сети").

Полное описание EX-ОКЦ-класса будет дано в разделе 7.

3.4. Применяя теорему 3.1 к задаче на $\max$-Σ $\Sigma(V,CS,\ell) = GEN(V,CS,\ell,0,1,0)$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.3. Для сети $N=(V,T,\ell)$ и схемы $CS\subseteq]T[$ справедливо

$$\Sigma^{N,CS} = \min\{\ell\cdot w :\ w\in R_+^{[V]},\ \nu_A^w\geq 1 \text{ для всех } A\in CS\} \quad \square \qquad (3.15)$$

Пусть $\mathcal{L}=\{L^u : u\in[T]\}$ - некоторая совокупность цепей, таких, что $u_{L^u}=u$, и пусть $\beta\in R_+^{[T]}$ удовлетворяет условию

$$\sum(\beta(u) : u\in[A,T\setminus A])\geq 1 \text{ для каждого } A\in CS.\qquad (3.16)$$

Тогда для функции $w=\sum(\beta(u)\theta_{L^u} : u\in[T])$ справедливо $\nu_A^w\geq 1$ для любого $A\in CS$ и из (3.15) следует

$$\Sigma^{N,CS}\leq \ell\cdot w = \sum(\beta(u)\ell_{L^u} : u\in[T]).$$

6716

Рассматривая в качестве $\mathcal{L}$ совокупность кратчайших цепей, мы получаем

$$\Sigma^{N,CS} \leq \min\{\Sigma(\beta(u)\mu_\ell(u) : u\in[T])\}, \qquad (3.17)$$

где минимум берется по всем $\beta\in R_+^{[V]}$, удовлетворяющим (3.16).

<u>Определение.</u> Схема $CS\subseteq\,]T[$ (а также множество задач $\Sigma(CS)$) считается принадлежащей классу ОКЦ относительно задач на $\max$-Σ (или, сокращенно, <u>Σ-ОКЦ-классу</u>), если для любой сети $N=(V,T,\ell)$ (т.е. при любых $V\supseteq T$ и $\ell\in R_+^{[V]}$) неравенство (3.17) обращается в равенство.

Легко видеть, что схемы CS_1 и CS_2 для задач о максимальной упаковке однопродуктовых разрезов, рассмотренных в разделе 2.2. принадлежат Σ-ОКЦ-классу. Этому же классу принадлежит схема $CS=\{(s) : s\in T\}$ (для любого $|T|\geq 2$), состоящая из "однополюсных" разрезов. Действительно, пусть $\beta[st]$ – переменная, сопоставляемая ребру $[st]\in[T]$, и ξ_s – переменная, сопоставляемая полюсу $s\in T$. Выпишем следующую пару двойственных друг другу задач линейного программирования (3.18) – (3.20) и (3.21) – (3.23):

$$\xi_s+\xi_t\leq\mu_\ell[st], \qquad [st]\in[T], \qquad (3.18)$$

$$\xi\in R_+^T, \qquad (3.19)$$

$$\Sigma(\xi_s : s\in T)\longrightarrow\max; \qquad (3.20)$$

$$\Sigma(\beta[st] : t\in T\setminus\{s\})\geq 1, \quad s\in T, \qquad (3.21)$$

$$\beta\in R_+^{[T]}, \qquad (3.22)$$

$$\Sigma(\beta[st]\mu_\ell[st] : [st]\in[T])\longrightarrow\min. \qquad (3.23)$$

Задачи (3.18) – (3.20) и (3.21) – (3.23) хорошо известны, и существуют эффективные алгоритмы их решения, дающие полуцелочисленное решение для задачи (3.21) – (3.23) и – в случае целочисленности μ_ℓ – полуцелочисленное решение задачи (3.18) – (3.20). Пусть ξ^* – оптимальное решение задачи (3.18) – (3.20). Определим мультиразрез π (в форме потенциалов) как $\pi_{\{s\}}(s)=0$, $\pi_{\{s\}}(x)=\min\{\mu_\ell[sx], \xi_s\}$ $(x\in T\setminus\{s\})$ для каждого $s\in T$. Из (3.18) следует $\lambda^\pi\leq\ell$, а из равенства $\|\pi\|=\Sigma(\delta^\pi_{\{s\}} : s\in T)=\Sigma(\xi_s : s\in T)$ следует, что π – оптимальное решение рассматриваемой задачи.

Полное описание Σ-ОКЦ-класса будет дано в разделе 8.

3.5. При помощи стандартных средств линейного программирования нетрудно показать, что задача о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости $COST(V,CS,\ell,a)$ эквивалентна задаче $GEN(V,CS,\ell,0,b^M,a)$ (где $b^M_A=M$, $A\in CS$) для любого M, большего некоторого положительного числа $M(\ell,a)$, зависящего от ℓ и a. Положим

$$\Sigma^{N,CS,a}_M=\max\{M\|\alpha\|-a\cdot\lambda^\alpha : \alpha\in R_+^{]V,CS[}, \ \lambda^\alpha\leq\ell\}$$

(где N обозначает сеть (V,T,ℓ)). Из теоремы 3.1 следует

$$\Sigma^{N,CS,a}_M=\min\{\ell\cdot(w-a) : w\in R_+^{[V]}, w\geq a, \nu^w|_{CS}\geq b^M\}. \qquad (3.24)$$

Пусть $\gamma : \mathcal{L}^{V,T}\to R_+$ – функция, удовлетворяющая

$$\Sigma(\gamma_L : L\in\mathcal{L}^{V,T}, u_L\in[A,T\setminus A])\geq M(\ell,a) \quad \text{для всех } A\in CS, \qquad (3.25)$$

и пусть $\tilde{w}\in R_+^{[V]}$ – функция, для которой $\Sigma^{N,CS}=\ell\cdot\tilde{w}$ и $\nu^{\tilde{w}}_A\geq 1$ для каждого $A\in CS$. Положим $w^1=\Sigma(\gamma_L\theta_L : L\in\mathcal{L}^{V,T})$, $w^2_e=\max\{w^1(e), a(e)\}$ $(e\in[V])$, $w_M=w^2+(M-M(\ell,a))\tilde{w}$. Тогда для произвольного $M>M(\ell,a)$, ввиду (3.24), (3.25) и (3.17), мы получаем $w_M>w^2\geq a$, $\nu^{w_M}|_{CS}\geq b^M$ и

$$\Sigma^{N,CS,a}_M\leq\ell\cdot(w_M-a)=\ell\cdot(\Sigma(\gamma_L\theta_L : L\in\mathcal{L}^{V,T})-a)^+ +(M-M(\ell,a))\Sigma^{N,CS} \qquad (3.26)$$

(где f^+ обозначает функцию, принимающую значения $f^+(s)=\max\{f(s), 0\}$, $s\in S$, для произвольной функции $f\in R^S$.

<u>Определение</u>. Скажем, что схема $CS\subseteq\,]T[$ принадлежит ОКЦ-классу относительно задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости (или, сокращенно, <u>COST-ОКЦ-классу</u>), если она принадлежит Σ-ОКЦ-классу и для любых $V\supseteq T$, $\ell\in R_+^{[V]}$ и $a\in R_+^{[V]}$ неравенство (3.26) обращается в равенство при некотором γ, удовлетворяющем (3.25).

Можно показать, что для оптимальной функции γ (т.е. обращающей (3.26) в равенство) имеется такая функция $\ell'\leq\ell$, что $\Sigma^{N',CS,a}_M=\Sigma^{N,CS,a}_M$ для любого $M>M(\ell,a)$ (где $N'=(V,T,\ell')$) причем каждая цепь L, для которой $\gamma_L>0$, является кратчайшей цепью в сети N'. Это делает уместным употребление термина "класс ОКЦ" в данном определении.

В разделе 8 будет указана одна серия схем, принадлежащих COST-ОКЦ-классу.

4. CS-ПРОСТЫЕ ФУНКЦИИ

4.I. Для данных $V, T\subseteq V, CS\subseteq]T[$ и $w\in R_+^{[V]}$ подмножество $X\subset V$ назовем CS-<u>сечением</u> функции w, если $X\cap T=A\in CS$ и $w[X,\bar X]=\nu_A^w$. Пусть $\mathcal{D}(w)$ обозначает множество всех CS-сечений функций w.

<u>Предложение 4.I.</u> Пусть $\{w',w''\}$ – CS-разложение функции w. Тогда $\mathcal{D}(w)=\mathcal{D}(w')\cap\mathcal{D}(w'')$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $w[X,\bar X]=w'[X,\bar X]+w''[X,\bar X]$ и $\nu_A^w=\nu_A^{w'}+\nu_A^{w''}$ для любого $X\subset V$, $X\cap T=A\in CS$, то равенство $w[X,\bar X]=\nu_A^w$ влечет равенства $w'[X,\bar X]=\nu_A^{w'}$ и $w''[X,\bar X]=\nu_A^{w''}$, и наоборот □

Скажем, что последовательность различных ребер $e_0, e_1,\ldots, e_{2k-1}$ в $[V]$ обладает <u>В-свойством</u> (относительно w), если:

а) имеется подмножество $X\subseteq V\setminus T$, такое, что $e_0,\ldots,e_{2k-1}\in[X,\bar X]$ и $[X,\bar X]\cap supp(w)\subseteq\{e_0,\ldots,e_{2k-1}\}$ ($supp(w)$ – носитель функции w);

б) для каждого $i=0,\ldots,2k-1$ имеются два CS-сечения X_i и Y_i, таких, что $\{e_i,e_{i+1},\ldots,e_{i+k-1}\}\subset[X_i,\bar X_i]$, $\{e_{i+k},\ldots,e_{i+2k-1}\}\subset[Y_i,\bar Y_i]$ (индексы берутся по модулю 2 к) и либо $X_i\cap X=\emptyset$, $Y_i=X_i\cup X$, либо $Y_i\cap X=\emptyset$, $X_i=Y_i\cup X$.

Любые два противоположных ребра e_i, e_{i+k} произвольной последовательности, обладающей В-свойством, назовем непосредственно зависимыми. Два ребра $e,e'\in[V]$ назовем <u>зависимыми</u>, если существует последовательность $e=e^0,e^1,\ldots,e^m=e'$, в которой каждые два соседних элемента – непосредственно зависимые. Отношение зависимости, очевидно, симметричное и транзитивное.

<u>Лемма 4.I.</u> Если в множестве $supp(w)$ каждые два ребра – зависимые, то функция w – CS-простая.

<u>Доказательство</u>. Пусть $e_0,e_1,\ldots,e_{2k-1}$ – последовательность, обладающая В-свойством. Для каждого i из условий (а) и (б) следует

$$w[X_i,\bar X_i]=\sum_{j=i}^{i+k-1}w(e_j),\qquad w[Y_i,\bar Y_i]=\sum_{j=i+k}^{i+2k-1}w(e_j).$$

Поскольку X_i и Y_i – CS-сечения и $X_i\cap T=Y_i\cap T$ (что следует из условий (а), (б)), то $\nu_A^w=w[X_i,\bar X_i]=w[Y_i,\bar Y_i]$, где $A=X_i\cap T$, откуда получаем для $\tilde w=w$:

$$\sum_{j=i}^{i+k-1}\tilde w(e_j)=\sum_{j=i+k}^{i+2k-1}\tilde w(e_j)\,. \tag{4.I}$$

Из равенств (4.I) для всех $i=0,\ldots,2k-1$ легко следует $w(e_i)=w(e_{i+k})$ для каждого $i=0,\ldots,2k-1$. Теперь из условий леммы мы получаем, что величина $w(e)$ одинакова для всех $e\in supp(w)$. Предположим, что $\{w',w''\}$ – некоторое CS-разложение функции w. Согласно предложению 4.I, $\mathcal{D}(w')\supseteq\mathcal{D}(w)$ и $\mathcal{D}(w'')\supseteq\mathcal{D}(w)$, кроме того, очевидно, $supp(w')\subseteq supp(w)$ и $supp(w'')\subseteq supp(w)$. Отсюда следует, что каждая последовательность ребер, обладающая В-свойством относительно w, обладает этим свойством и относительно w' и w''. Применяя к w' и w'' те же самые рассуждения, что и к w, мы получаем, что (4.I) справедливо для $\tilde w=w'$ и $\tilde w=w''$, откуда следует, что $w'(e)=const_1$, $w''(e)=const_2$ $(e\in supp(w))$, т.е. w' и w'' – пропорциональны w □

4.2. Для произвольного подграфа $G=(V',E)$ полного графа $(V,[V])$ положим $w_G=\theta_E^{[V]}$. Граф G назовем <u>четным</u> <u>V,T-деревом</u> (для данного T), если выполняется:

(i) граф G – связен и не содержит циклов,

(ii) множество вершин в G, имеющих степень 1, совпадает с $V'\cap T$,

(iii) каждая вершина в $V'\setminus T$ имеет четную степень.

<u>Теорема 4.I.</u> Пусть $G=(V',E)$ является четным V,T-деревом, $T'=V'\cap T$, и пусть $CS\subseteq]T[$ – такое множество, что для каждого $A'\in]T'[$ имеется $A\in CS$, для которого $A\cap T'=A'$ или $A\cap T'=T'\setminus A'$. Тогда функция w_G – CS-простая.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим произвольную вершину $x\in V'\setminus T$, и пусть x имеет степень $2k$ (согласно (i),(iii) k – положительное целое), и $E(x)$ – множество ребер в G, инцидентных x. Из (i),(ii) следует, что для произвольного подмножества $E'\subset E(x)$, $|E'|=k$, имеется два CS-сечения функции w_G, таких, что $[X,\bar X]\cap E=E'$, $[Y,\bar Y]\cap E=E(x)\setminus E'$ и либо $X\subset Y$, $Y\setminus X=\{x\}$, либо $Y\subset X$, $X\setminus Y=\{x\}$. Отсюда нетрудно вывести, что любые два ребра в $E(x)$ – непосредственно зависимые и, как следствие, что любые два ребра в E – зависимые. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 4.I □

(Заметим, что условия на множество CS в теореме 4.I могут быть ослаблены).

Приведем примеры некоторых CS-простых функций w, которые понадобятся в дальнейшем (их корректность следует из теоремы 4.I).

Пример I. $w=\theta_L$, где $L\in\tilde{\mathfrak{X}}^{V,T}$ – правильная цепь. Поскольку подграф, порожденный множеством ребер E_L, является четным V,T-деревом, функция w – CS-простая для всякого $CS\subseteq\,]T[$, содержащего такое подмножество A, что $u_L\in[A,T\setminus A]$.

Пример 2. $w=w_G$, где $G=(V',E)$, $V'\subseteq V$, – произвольный подграф, гомеоморфный графу, изображенному на рис. 4.Iа. Пусть $T\subset V$ – некоторое подмножество, такое, что $T\cap V'=T'=\{0,1,2,3\}$. Тогда функция w является $]T[$-простой. При помощи леммы 4.I можно показать, что w является CS-простой функцией для произвольного $CS\subseteq\,]T[$, содержащего такие подмножества A_1,A_2,A_3, что для каждого $i=1,2,3$ $\{0,i\}$ совпадает с $T'\cap A_i$ либо с $T'\cap(T\setminus A_i)$.

Пример 3. $w=w_G$, где $G=(V',E)$, $V'\subseteq V$, – произвольный подграф, гомеоморфный графу, изображенному на рис. 4.Iб. Пусть $T\subset V$ – некоторое подмножество, для которого $T\cap V'=T'=\{0,\dots,5\}$. Тогда функция w – $]T[$-простая. Используя лемму 4.I, можно показать, что функция w является CS-простой для произвольного $CS\subseteq\,]T[$, содержащего три таких подмножества A_1,A_2,A_3, что для каждого i $\{i,i+1,i+2\}$ совпадает с $T'\cap A_i$ либо с $T'\cap(T\setminus A_i)$.

Лемма 4.I и теорема позволяют сконструировать, при желании, другие примеры CS-простых функций.

В заключении приведем без доказательства ряд утверждений о $]T[$-простых функциях для $|T|=2,3,4,5$.

I) Если $|T|\leq 3$, то $]T[$-простыми функциями являются функции θ_L для правильных цепей L и только они.

2) Пусть $|T|=4$. Тогда $]T[$-простыми функциями, помимо указанных в I, являются только функции $\theta_{L'}+\theta_{L''}$, где L' и L'' – две правильные цепи, такие, что все 4 концевые вершины в них – различны, и $L'\cap L''$ является непустой связной подцепью как в L' так и в L'' (быть может, состоящей из одного элемента).

3) Пусть $|T|=5$. Тогда имеется еще один тип $]T[$-простых функций. Положим $T=\{0,\dots,4\}$, и пусть L^i $(i=0,\dots,4)$ – такие пять цепей на V, что $u_{L^i}=[ix]$ и каждые две цепи пересекаются только в вершине x, где x – некоторый элемент в $V\setminus T$. Тогда функция $\theta_{L^0}+\frac{1}{2}\sum(\theta_{L^i}: i=1,\dots,4)$ является $]T[$-простой (этот факт уже не следует из леммы 4.I или теоремы 4.I).

5. ТЕОРЕМА О ЗАПИРАЕМЫХ ГРАФАХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

5.I. Функцию $\ell\in\mathbb{Z}_+^{[V]}$ назовем квазичетной, если величина $\ell_C=\sum(\ell(e): e\in E_C)$ – четна для любого цикла C на V. Следующая теорема дает полное описание множества запираемых графов, определенных в разделе 2.4.

Теорема 5.I. Пусть $H=(T,U)$ – граф без изолированных вершин.

(а) Для любого множества $V\supseteq T$ следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $LOCK(V,U,\ell)$ имеет решение для любой функции ℓ;

(ii) $H\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$.

(б) Пусть $H\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, $V\supseteq T$, и пусть функция $\ell\in\mathbb{Z}_+^{[V]}$ – квазичетная. Тогда задача $LOCK(V,U,\ell)$ имеет целочисленное решение.

Доказательство $(i)\to(ii)$ будет дано в разделе 5.3, а доказательство $(ii)\to(i)$ – в разделе 5.4. Доказательство утверждения (б) будет следовать из алгоритма, описанию которого посвящен раздел 6.

5.2. Опишем некоторые применения теоремы 5.I. Для этого нам потребуется одно простое утверждение.

Пусть $\alpha:]V,CS[\,\to R_+$ – допустимый мультиразрез в сети (V,T,ℓ) и $L\in\mathfrak{X}^{V,T}$ – некоторая цепь. Скажем, что α и L – согласованы, если $\sum |E_L\cap[X,\bar{X}]|\leq 1$ для любого $X\in\,]V,CS[$ такого, что $\alpha_X>0$. (5.I)

Скажем, что α насыщает L, если

$$\lambda^{\alpha}(e)=\ell(e) \quad \text{для всех} \quad e\in E_L. \tag{5.2}$$

Предложение 5.I. Допустимый мультиразрез $\alpha:]V,CS[\,\to R_+$ запирает ребро $(st)\in[T]$ (т.е. выполняется (2.4)) тогда и только тогда, когда для произвольной кратчайшей цепи L (относительно ℓ) с концами s и t выполняется (5.I) и (5.2).

Доказательство непосредственно следует из рассмотрения неравенств в выражении (2.3).

А. Решение двухпродуктовой задачи о существовании $EX(V,CS_2,\ell,d)$, где $T=\{s,t,p,q\}$, $CS_2=\{\{s,p\},\{s,q\}\}$. Вначале проверяется выполнение неравенств (3.I4) для всех $u\in[T]$. Если какое-либо из этих неравенств нарушено, то, согласно следствию 3.I, задача не имеет решения. Пусть эти неравенства выполняются. Положим $d_1 = d_{\{s,p\}}$, $d_2 = d_{\{s,q\}}$ и определим функцию $\tilde{\ell} \in R_+^{[V]}$ как

$$\tilde\ell(e) = \begin{cases} d_1, & e = [sq], [tp], \\ d_2, & e=[sp],[tq], \\ d_1+d_2, & e=[st],[pq], \\ \ell(e) & \text{– для остальных } e \text{ в } [V]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\mu_{\tilde\ell}(u) = \tilde\ell(u)$ для каждого $u \in [T]$ и что каждая из цепей $L_1=[spt]$, $L_2=[sqt]$, $L_3=[psq]$, $L_4=[ptq]$ является кратчайшей относительно $\tilde\ell$. Пусть $\alpha:]V,T[\to R_+$ – решение задачи о запирающем мультиразрезе $LOCK(V,U,\tilde\ell)$ для $U=\{[st],[pq]\}$ (по теореме 5.I эта задача разрешима, поскольку $(T,U)\in \mathfrak{X}^2$). Покажем, что фактически α является и решением задачи $EX(V,CS_2,\ell,d)$. Положим $CS=\{\{s\},\{t\},\{p\},\{q\},\{s,p\},\{s,q\},\{s,t\}\}$. Поскольку схема CS эквивалентна схеме $]T[$ (см. определение в 2.3), мы можем считать, что $\alpha_X=0$ для каждого $X\in]V,]T[\setminus CS[$. Положим

$$\mathcal{R}^+=\{X\in]V,CS[: \alpha_X>0\},\quad \mathcal{R}^+_i=\{X\in\mathcal{R}^+ : X\cap T=\{i\}\}\ (i\in T),$$
$$\mathcal{R}^+_{ij}=\{X\in\mathcal{R}^+ : X\cap T=\{i,j\}\}\ (ij\in\{sp,sq,st\}).$$

Рассматривая кратчайшие цепи L_1,L_2,L_3,L_4 и применяя предложение 5.I, мы получаем $\mathcal{R}^+_i=\emptyset$ для каждого $i\in T$ и $\mathcal{R}^+_{st}=\emptyset$. Таким образом, $d_1=\mu_{\tilde\ell}[sq]=\sum(\alpha_X : X\in\mathcal{R}^+_{sp})$ и $d_2=\mu_{\tilde\ell}[sp]=\sum(\alpha_X:X\in\mathcal{R}^+_{sq})$, что и требовалось. Если, кроме того, функция $\tilde\ell$ – квазичетная, то, согласно теореме 5.I, задача $EX(V,CS_2,\ell,d)$ имеет целочисленное решение.

Б. Решение двухпродуктовой задачи на max-Σ $\Sigma(V,CS_2,\ell)$ (см. пример 2 из 2.2). Пусть $\alpha:]V,T[\to R_+$ – решение задачи $LOCK(V,U,\ell)$, где $U=\{[st],[pq]\}$. Определим $CS,\mathcal{R}^+_i,\mathcal{R}^+_{ij}$ тем же способом, что и в предыдущем случае. Для того, чтобы получить оптимальное решение задачи $\Sigma(V,CS_2,\ell)$ будем последовательно преобразовывать мультиразрез α. Пусть для текущего α $\mathcal{R}^+_i\ne\emptyset$ и $\mathcal{R}^+_j\ne\emptyset$ для некоторых $i,j\in T$: $[ij]\notin U$. Выберем произвольные $X\in\mathcal{R}^+_i$ и $Y\in\mathcal{R}^+_j$. Без ограничения общности можно считать, что $\{i,j\}\in CS_2$ и $\alpha_X\ge\alpha_Y=a$. Положим $\alpha_X:=\alpha_X-a$, $\alpha_Y:=\alpha_Y-a$, $\alpha_Z:=\alpha_Z+a$, где $Z=X\cup Y$. Легко

проверить, что новый мультиразрез α будет решением задачи $LOCK(V,U,\ell)$. В результате не более $|\mathcal{R}^+|$ преобразований (для начального $\mathcal{R}^+$) мы получим такое решение α задачи $LOCK(V,U,\ell)$, что $|\mathcal{R}^+_i|\cdot|\mathcal{R}^+_j|=0$ для всех $ij:[ij]\notin U$. Пусть мультиразрез $\alpha^*:]V,CS_2[\to R_+$ определен как $\alpha^*_X=\alpha_X$, $X\in]V,CS_2[$. Тогда α^* является оптимальным решением задачи $\Sigma(V,CS_2,\ell)$. Действительно, если $\mathcal{R}^+_s=\mathcal{R}^+_t=\emptyset$, то $\|\alpha^*\|=\sum(\alpha_X: X\in\mathcal{R}^+_{sp}\cup\mathcal{R}^+_{sq})=\mu_\ell[st]$, и, аналогично, если $\mathcal{R}^+_p=\mathcal{R}^+_q=\emptyset$, то $\|\alpha^*\|=\mu_\ell[pq]$. Из теоремы 5.I следует также, что, если функция ℓ – квазичетная, то задача $\Sigma(V,CS_2,\ell)$ имеет целочисленное оптимальное решение. Таким образом, мы получаем другое доказательство теоремы Сеймура [21], упомянутой в 2.2.

В. Пусть μ – метрика на V. Цепь $L=[x=x_0x_1\dots x_k=y]$ называется <u>геодезической</u> для μ, если $\mu[xy]=\sum(\mu[x_ix_{i+1}]: i\in\overline{0,k-1})$; геодезическая L считается <u>максимальной</u>, если она не является частью никакой другой геодезической L'. Пусть μ – строго положительная метрика (т.е. $\mu(e)>0$ для всех $e\in[V]$). Вершина $s\in V$ считается <u>полюсом</u> метрики μ, если s – конец некоторой максимальной геодезической; две вершины s,t называются <u>парой антиподов</u> метрики μ, если существует максимальная геодезическая с концами s и t (это понятие введено в [8]). Образуем <u>экстремальный</u> граф $\mathcal{H}_\mu=(T,U)$, в котором T – множество полюсов, а U – множество пар антиподов метрики μ.

Интересен вопрос: при каких условиях метрика μ является неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов, т.е. существует такая функция $\alpha\in R_+^{]V[}$, что

$$\mu=\sum(\alpha_X\delta^V_X : X\in]V[) \qquad (5.3)$$

(этот вопрос был поставлен в работе [3] и – в несколько раз иной форме – в работе [22]). Скажем, что вершины $x,y\in V$ – μ-эквивалентны, если $\mu[xy]=0$. Отношение μ-эквивалентности транзитивно и определяет разбиение множества V на семейство подмножеств $V^\mu=\{X,Y,\dots,Z\}$. Определим функцию $\tilde\mu$ на $[V^\mu]$ как $\tilde\mu[WW']=\mu[xy]$, где x – произвольная вершина в W, а y – произвольная вершина в W' ($\tilde\mu$ называется <u>сжатием</u> метрики μ [8]). Очевидно, $\tilde\mu$ – строго положительная метрика на V^μ.

<u>Теорема 5.2.</u> Пусть μ – метрика на V, $\tilde\mu$ – ее сжатие,

и $\mathcal{A}_{\mu} \in \{K_4, C_5\} \cup \mathfrak{X}^2$. Тогда μ имеет представление (5.3).

Очевидно, достаточно показать, что $\tilde{\mu} = \Sigma(\varkappa_X \rho_X^{V^\mu} : X \in]V^\mu[)$ для некоторого $\varkappa :]V^\mu[\to \mathbb{R}_+$. Доказательство вытекает из теоремы 5.I и следующей леммы.

<u>Лемма 5.I.</u> Пусть μ' - строго положительная метрика на V' с экстремальным графом $\mathcal{A}_{\mu'} = (T', U')$, и пусть $\alpha' \in \mathbb{R}_+^{]V'[}$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) α' является решением задачи $LOCK(V', \mathcal{A}_{\mu'}, \mu')$,

(ii) α' удовлетворяет (5.3) (для $\mu = \mu'$).

<u>Доказательство</u>. Пусть α' - решение задачи $LOCK(V', \mathcal{A}_{\mu'}, \mu')$, и пусть e - произвольное ребро в $[V]$. Очевидно, $e \in E_L$ для некоторой максимальной геодезической L . Поскольку $u_L \in U'$, то, ввиду предложения 5.I, $\lambda^{\alpha'}(e) = \mu'(e)$, следовательно, α' удовлетворяет (5.3). Обратно, пусть α' удовлетворяет (5.3). Тогда $\mu_{\mu'}[st] = \mu'[st] = \lambda^{\alpha'}[st]$ для каждого $[st] \in U'$, т.е. α' является решением задачи $LOCK(V', \mathcal{A}_{\mu'}, \mu')$ $\square$

5.3. <u>Доказательство (i)→(ii) в теореме 5.I.</u> Пусть $H = (T, U)$ - граф без изолированных вершин, не принадлежащий множеству $\{K_4, C_5\} \cup \mathfrak{X}^2$. В [9] показывается, что такие графы H характеризуются наличием подграфа $H' = (T', U')$ по крайней мере одного из двух видов: (а) "треугольник и ребро" $\triangleq$ (рис.5.Iа, здесь $T' = \{s, t, p, q, r\}$, $U' = \{[st], [pq], [qr], [rp]\}$;(б) "граф-паросочетание" $\equiv$ (рис.5.Iб, здесь $T' = \{s, t, p, q, r, m\}$, $U' = \{[st], [pq], [rm]\}$. Известны простые метрики (т.е. метрики μ , не представимые в виде неотрицательной линейной комбинации метрик, не пропорциональных μ , и, в частности, не имеющие представления (5.3)) с графами антиподов $\triangleq$ и $\equiv$: (а) метрика $\mu_{K_{2,3}}$, порождаемая расстояниями в полном двудольном графе $K_{2,3}$, имеет граф антиподов $\triangleq$ (рис. 5.Iв), (б) метрика $\mu_{K_{3,3} \setminus \{e\}}$, порождаемая графом $K_{3,3} \setminus \{e\}$, полученным из полного двудольного графа $K_{3,3}$ удалением одного ребра, имеет граф антиподов $\equiv$ (рис.5.1г) (эта метрика впервые введена в рассмотрение в [9]). Согласно лемме 5.I, задачи $LOCK(T', \triangleq, \mu_{K_{2,3}})$ и $LOCK(T', \equiv, \mu_{K_{3,3} \setminus \{e\}})$ не имеют решения. Пусть теперь $H = (T, U)$ - граф, содержащий подграф $\triangleq$. Для произвольного $V \supseteq T$ рассмотрим сеть (V, T, ℓ), где $\ell(e) = \mu_{K_{2,3}}(e)$ при $e \in [T']$ и $\ell(e) = M$ при $e \in [V] \setminus [T']$ и $M \geq 2$. Тогда $\mu_\ell(e) = \mu_{K_{2,3}}(e)$ для $e \in [T']$,

и если бы задача $LOCK(V, U, \ell)$ имела решение, то это же было бы верно и для задачи $LOCK(T', \triangleq, \mu_{K_{2,3}})$. Аналогичная сеть строится для графа H , содержащего подграф $\equiv$ (нужно положить $M \geq 3$).

5.4. <u>Доказательство (ii)→(i) в теореме 5.I</u>. Надо показать, что для произвольных $V \supseteq T$, $\ell \in \mathbb{R}_+^{[V]}$ и $H = (T, U) \in \{K_4, C_5\} \cup \mathfrak{X}^2$ задача $LOCK(V, U, \ell)$ имеет решение. Достаточно доказать разрешимость задачи $LOCK(V, U, \mu)$, где $\mu = \mu_\ell$. Согласно теореме 2.4, мультипотоковая задача о допустимости $EX^f(V, U, w, d)$, $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$, $d \in \mathbb{R}_+^U$, разрешима тогда и только тогда, когда для любого $X \in]V[$ выполняется

$$w \cdot \rho_X^V - \Sigma(d(u) : u \in U \cap [X, \bar{X}]) \geq 0 \qquad (5.4)$$

Из теоремы 2.2 следует, что для любых $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$, $d \in \mathbb{R}_+^U$, удовлетворяющих неравенству (5.4) для всех $X \in]V[$, справедливо

$$\mu \cdot w - (\mu|_U) \cdot d \geq 0 \qquad (5.5)$$

Применяя лемму Фаркаша к импликации $\forall w \in \mathbb{R}_+^{[V]}\ \forall d \in \mathbb{R}_+^U$ $(\forall X \in]V[\ (5.4) \to (5.5))$ получаем, что для системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma(\alpha_X \rho_X^V : X \in]V[) \leq \mu, \\ \Sigma(\alpha_X : X \in]V[, u \in [X, \bar{X}]) \geq \mu(u), \quad u \in U, \\ \alpha \in \mathbb{R}_+^{]V[} \end{array}\right\} (5.6)$$

существует решение α^* . Тогда α^* , очевидно, является решением задачи $LOCK(V, U, \mu)$.

<u>Замечание 5.I.</u> Пусть теперь имеется некоторая задача $LOCK(V, U, \ell)$ с произвольным графом $H = (T, U)$. Разрешимость этой задачи равносильна совместности системы (5.6) (при $\mu = \mu_\ell$). Рассматривая системы (5.4) - (5.5) и (5.6) и применяя лемму Фаркаша, мы получаем следующее утверждение: задача $LOCK(V, U, \ell)$ разрешима тогда и только тогда, когда (5.5) справедливо для любых функций $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$, $d \in \mathbb{R}_+^U$, таких, что неравенство (5.4) выполнено для любого $X \in]V[$. Это утверждение демонстрирует двойственную связь между задачей о запирающем мультиразрезе $LOCK(V, U, \ell)$ и мультипотоковыми задачами о существовании $EX^f(V, U, w, d)$, для которых выполнены все условия Форда-Фалкерсона.

Далее, ввиду леммы 5.I, справедливо следующее утверждение: пусть μ – строго положительная метрика на V с графом антиподов $\mathcal{A}_\mu = (T, U)$. Тогда μ не является неотрицательной линейной комбинацией метрик-разрезов (т.е. не имеет представления (5.3) тогда и только тогда, когда существуют $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$, $d \in \mathbb{R}_+^{U}$, удовлетворяющие неравенству (5.4) для всех $X \in]V[$ и неравенству $\mu \cdot w - (\mu|_U) \cdot d < 0$. По-видимому, для произвольной метрики вряд ли может быть дан "хороший" комбинаторный критерий существования представления (5.3).

6. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЗАПИРАЮЩЕГО МУЛЬТИРАЗРЕЗА

6.I. Для завершения доказательства теоремы 5.I нам надо показать, что для произвольных $V \supseteq T$, квазичетной функции ℓ на $[V]$ и графа $H = (T, U) \in \{K_4, C_5\} \cup \mathfrak{X}^2$ задача $LOCK(V, U, \ell)$ имеет целочисленное решение, т.е. существует такой допустимый мультиразрез $\alpha :]V, T[\to \mathbb{R}_+$, что для каждого ребра $u \in U$ выполняется

$$\varkappa^\alpha(u) = \mu_\ell(u) \qquad (6.I)$$

Мы дадим алгоритм построения указанного мультиразреза (алгоритм $ALOCK$). Этот алгоритм, излагаемый в 6.6 – 6.II, – довольно сложный и имеет особенности для каждого из случаев K_4, C_5, $\mathfrak{X}^2$. Читатель может пропустить чтение всего раздела 6. В 6.2 – 6.5 будут описаны вспомогательные процедуры, используемые в алгоритме. Общая оценка числа действия алгоритма – $O(P(|V|)\,\ell[V])$, где $\ell[V] = \sum(\ell(e) : e \in [V])$ и $P(n)$ – некоторый полином (эта оценка будет установлена в 6.I0).

6.2. <u>Увеличивающие подмножества</u>. Пусть $\alpha :]V, T[\to \mathbb{Z}_+$ – целочисленный мультиразрез на V (не обязательно допустимый). Сопоставим ему комбинаторный мультиразрез Q, состоящий из подмножеств в V, в котором для каждого $Y \in]V, T[$ имеется ровно α_Y одинаковых подмножеств $X \in Q : X = Y$. Для Q определяются функции $\lambda, \delta, \varkappa$ – те же самые, что и для α (см. раздел I.3):

$$\lambda^Q = \sum(\rho_X^V : X \in Q),\ \delta_A^Q = |\{X \in Q : X \cap T = A\}|,\ \varkappa^Q = \lambda^Q|_{[T]}. \qquad (6.2)$$

Очевидно, с точки зрения рассматриваемой задачи безразлично, содержится ли в Q элемент X или его дополнение $X' = V \setminus X$. На этом свойстве основан неоднократно используемый

в дальнейшем прием эквивалентного преобразования мультиразреза Q, состоящий в следующем. Фиксируется некоторое подмножество полюсов $T' \subseteq T$ и в Q выделяется некоторое подсемейство Q'. Каждый элемент X из Q', для которого $T' \subseteq X$, заменяется элементом $\bar{X}$. Такое преобразование семейства Q' назовем <u>T'-ориентированием</u>. Будем говорить также, что семейство Q' является <u>T'-ориентированным</u>, если в нем отсутствуют такие элементы X, что $T' \subseteq X$. Пусть $(X, \bar{X})$ обозначает множество всех дуг (xy) на V (т.е. упорядоченных пар элементов $x, y \in V$; см. раздел I.1), для которых $x \in X$, $y \in \bar{X}$, где $X \subset V$.

Пусть фиксирована упорядоченная пара полюсов (st). В мультиразрезе Q выделим семейство $Q_{(st)} = \{X \in Q : [st] \in [X, \bar{X}]\}$ и произведем $\{t\}$-ориентирование этого семейства; полученный $\{t\}$-ориентированный мультиразрез будем по-прежнему обозначать $Q_{(st)}$.

Пусть $Q_{(st)}$ -допустимый $\{t\}$-ориентированный мультиразрез в сети (V, T, ℓ), и пусть $\tilde{X} \subset V$ – некоторое подмножество такое, что $s \in \tilde{X}$, $t \in \bar{\tilde{X}}$. Множество $\tilde{X}$ назовем <u>увеличивающим</u> (относительно $Q_{(st)}$ и ℓ), если для любой дуги $(xy) \in (\tilde{X}, \bar{\tilde{X}})$ верно по крайней мере одно из двух: (а) $Q_{(st)}$ не насыщает ребро $[xy]$ (т.е. $\lambda^{Q_{(st)}}[xy] < \ell[xy]$), (б) дуга (xy) – входящая для некоторого элемента $X \in Q_{(st)}$, т.е. $(yx) \in (X, \bar{X})$.

<u>Лемма 6.I</u>. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) $Q_{(st)}$ не запирает ребро $[st]$;

(ii) существует увеличивающее множество $\tilde{X}$ (для $Q_{(st)}$ и ℓ.);

Доказательство следует из приводимого ниже алгоритма.

<u>Алгоритм нахождения увеличивающего множества (АУМ)</u>. В процессе алгоритма вершины бывают помеченными и непомеченными. Пусть Lab – текущее множество помеченных вершин, и имеется отображение $p : Lab \setminus \{s\} \to Lab$. Вначале $Lab = \{s\}$.

На очередной итерации последовательно просматриваются непомеченные вершины y и для каждой из этих вершин последовательно просматриваются помеченные вершины x. (а) Если найдена такая вершина $x \in Lab$, что $\lambda^{Q_{(st)}}[xy] = \ell[xy]$ и не существует такого $X \in Q_{(st)}$, что $(yx) \in (X, \bar{X})$, то полагаем $Lab := Lab \cup \{y\}$, $p(y) := x$, и итерация оканчивается. (б) Если помеченной вершиной становится t, то алгоритм оканчивается.

(в) Если для каждого $y \in V \setminus L_{ab}$ не существует вершины x, указанной в (и), то алгоритм оканчивается.

<u>Лемма 6.2</u>. Пусть $\widetilde{X}$ – увеличивающее множество для $Q_{(st)}$ и ℓ, и пусть $L_{sx} = [s = x_0 x_1 \dots x_k = x]$ – такая цепь, что для любого $i = 0, \dots, k-1$ $\lambda^{Q_{(st)}}[x_i x_{i+1}] = \ell[x_i x_{i+1}]$ и не существует такого $X \in Q_{(st)}$, что $(x_{i+1} x_i) \in (X, \bar{X})$. Тогда $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} \subseteq \widetilde{X}$.

Доказательство очевидно □

Цепь L_{sx}, удовлетворяющую условиям леммы 6.2, назовем <u>насыщенно-согласованной</u> (с $Q_{(st)}$). В случае (в) $X = L_{ab}$ – искомое увеличивающее множество. По лемме 6.2 никакая цепь L с концами s и t не может быть насыщенно-согласованной, откуда, ввиду предложения 5.I, $\varkappa^{Q_{(st)}}[st] < \mu_\ell[st]$. В случае (б) цепь $L_{st} = [s = x_0 x_1 \dots x_k = t]$, где $x_i = p(x_{i+1})$ – насыщенно-согласованная. Отсюда, ввиду предложения 5.I, $\varkappa^{Q_{(st)}}[st] = \mu_\ell[st]$, и теперь из леммы 6.2 следует, что увеличивающего множества не существует. Лемма 6.I доказана.

<u>Замечание 6.I.</u> Совокупность всех увеличивающих множеств (для $Q_{(st)}$ и ℓ) образует подструктуру в булевой алгебре всех подмножеств в V, поскольку для любых двух увеличивающих множеств X_1, X_2 множества $X_1 \cap X_2$ и $X_1 \cup X_2$ – очевидно, также увеличивающие. Следовательно, существуют минимальное (X_{min}) и максимальное (X_{max}) увеличивающие множества. Из леммы 6.2. следует, что в случае (в) $L_{ab} = X_{min}$ (поскольку для любого $x \in L_{ab}$ цепь $L_{sx} = [s = x_0 x_1 \dots x_k = x]$, $x_i = p(x_{i+1})$, – насыщенно-согласованная).

<u>Замечание 6.2</u>. Пусть перед началом алгоритма АУМ произведена предварительная обработка, состоящая в определении функции $\lambda^{Q_{(st)}}$ и в построении для каждой дуги (zv) на V списка $\mathfrak{R}^{(zv)}$, состоящего из всех элементов $X \in Q_{(st)}$, для которых $(zv) \in (X, \bar{X})$. Тогда алгоритм АУМ может быть так модифицирован, чтобы его трудоемкость была $O(|V|^2)$ (на каждом шаге алгоритма достаточно знать только пуст или нет список $\mathfrak{R}^{(yx)}$ для исследуемой дуги (xy)).

6.3. Для произвольного семейства $\mathcal{D}$ подмножеств множества V определим семейство $\mathcal{D}^T = \{X^T = X \cap T : X \in \mathcal{D}\}$ подмножеств множества T. Семейство $\mathcal{D}$ назовем <u>параллельным на полюсах</u>, если семейство $\mathcal{D}^T$ – параллельное (определение см. в разделе 2.6), при этом само $\mathcal{D}$ может не быть параллельным.

Пусть X_1, X_2 – трансверсальные подмножества в V (определение в 2.6). Операция <u>распараллеливания</u> состоит в замене X_1 и X_2 множествами $X_1 \cap X_2$ и $X_1 \cup X_2$. Для $X_1, X_2 \subset V$, таких, что $X_1^T \cap X_2^T = \varnothing$ (где $X_i^T = X_i \cap T$) определим множество $X_1 \square X_2 = X_1 \cup X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$.

Будем писать $X_1 \parallel X_2$, если X_1 и X_2 – параллельны, и $X_1 \nparallel X_2$ – если X_1 и X_2 – трансверсальны.

<u>Лемма 6.3.</u> Пусть $X_1, X_2 \in Q$ (а) Если $X_1 \nparallel X_2$ и $Q^* = Q \setminus \{X_1, X_2\} \cup \{X_1 \cap X_2, X_1 \cup X_2\}$, то $\lambda^Q - \lambda^{Q^*} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$.
(б) Если $X_1^T \cap X_2^T = \varnothing$ и $Q^* = Q \setminus \{X_1, X_2\} \cup \{X_1 \square X_2\}$, то $\lambda^Q - \lambda^{Q^*} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$.

Доказательство оставляем читателю. Семейство Q^* в условии (а) леммы будем обозначать $Q \diamond X_1 X_2$, а в условии (б) – $Q \square X_1 X_2$.

<u>Лемма 6.4</u>. Пусть $X_1, X_2 \in Q$, $X_1 \nparallel X_2$ и $X_1^T \subseteq X_2^T$. Тогда $\varkappa^{Q \diamond X_1 X_2} = \varkappa^Q$.

Доказательство следует из того, что $(X_1 \cap X_2)^T = X_1^T$, $(X_1 \cup X_2)^T = X_2^T$ □

6.4. Пусть $\ell \in \mathbb{Z}_+^{[V]}$. $\{t\}$-ориентированный мультиразрез $Q_{(st)}$ назовем <u>предупаковкой</u>, если $\ell - \lambda^{Q_{(st)}} \in 2\mathbb{Z}^{[V]}$, (б) $\lambda^{Q_{(st)}} \leq \ell + 2$, (в) для каждого ребра $e = [xy]$, такого, что $\lambda^{Q_{(st)}}[xy] = \ell[xy] + 2$, существуют и фиксированы три различных элемента $X_e^1, X_e^2, X_e^c \in Q_{(st)}$, для которых $|X_e^1 \cap \{x,y\}| = |X_e^2 \cap \{x,y\}| = |X_e^c \cap \{x,y\}| = 1$, $X_e^1 \cap \{x,y\} = X_e^2 \cap \{x,y\} \neq X_e^c \cap \{x,y\}$ (такое ребро e назовем <u>избыточным</u>, множества X_e^1 и X_e^2 также назовем избыточными, а множество X_e^c – <u>компенсирующим</u>).

Следующий алгоритм преобразует предупаковку $Q_{(st)}$ в допустимый мультиразрез $Q^*_{(st)}$ той же мощности (т.е. $|Q_{(st)}| = |Q^*_{(st)}|$).

<u>Алгоритм перестройки предупаковки (АПП)</u>. На очередной итерации произвольно выбирается избыточное ребро e. Итерация состоит из двух стадий.

<u>На 1-й стадии</u> произвольно выбирается одно из двух избыточных множеств X_e^1, X_e^2 (скажем, выбрано X_e^1) и $Q_{(st)}$ преобразуется в $C_{(\ t)} := Q_{(st)} \diamond X_e^1 X_e^c$.

<u>На 2-й стадии</u> для тех избыточных ребер $[zv]$, для которых X_e^1 или X_e^c было избыточным (компенсирующим) множеством, и которые продолжают оставаться избыточными ребрами, назначаются новые избыточные (компенсирующие) множества. А именно:

(а) для ребра $[zv]$ такого, что $z \in X_e^1 \cap X_e^c$, $v \in X_e^1 \nabla X_e^c$, новым избыточным (компенсирующим) множеством становится $X_e^1 \cap X_e^c$;

(б) для $[zv]$ такого, что $z \in X_e^1 \nabla X_e^c$, $v \in V \setminus (X_e^1 \cup X_e^c)$, новым избыточным (компенсирующим) множеством становится $X_e^1 \cup X_e^c$

(в) для ребра $[zv]$ такого, что $z \in X_e^1 \cap X_e^c$, $v \in V \setminus (X_e^1 \cup X_e^c)$, в качестве нового избыточного (компенсирующего) множества берется $X_e^1 \cap X_e^c$ или $X_e^1 \cup X_e^c$.

На основании леммы 6.3 имеем $\lambda^{Q(st)} - \lambda^{Q'(st)} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$, где $Q'_{(st)} = Q_{(st)} \Diamond X_e^1 X_e^c$. Кроме того, в результате итерации все прежние избыточные ребра $[zv]$ такие, что $z \in X_e^1 \cap \bar{X}_e^c$, $v \in \bar{X}_e^1 \cap X_e^c$ (в том числе $[zv] = e$), становятся неизбыточными. Таким образом, справедлива

Лемма 6.5. Число итераций АПП – не более $|[V]|$. В результате АПП будет построен допустимый мультиразрез $Q^*_{(st)}$, для которого $\ell - \lambda^{Q^*(st)} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$.

Определение. Предупаковка $Q_{(st)}$ называется разделяющейся, если фиксировано разбиение $Q_{(st)}$ на два подсемейства $Q^1_{(st)}, Q^2_{(st)}$ и (а) каждое подсемейство $Q^i_{(st)}$ – параллельное на полосах, (б) для каждого избыточного ребра e множества X_e^1 и X_e^2 принадлежат различным подсемействам $Q^i_{(st)}$.

Следующая лемма особенно важна для дальнейшего.

Лемма 6.6. Пусть начальная предупаковка $Q_{(st)}$ – разделяющаяся. Тогда алгоритм АПП может быть конкретизирован таким образом, что для результирующего мультиразреза $Q^*_{(st)}$ будет справедливо $\varkappa^{Q^*(st)} = \varkappa^{Q(st)}$.

Доказательство. Пусть по индуктивному предположению к началу очередной итерации (с избыточным ребром e) предупаковка $Q_{(st)}$ – разделяющаяся ($Q_{(st)} = Q^1_{(st)} \cup Q^2_{(st)}$), и пусть $X_e^c, X_e^j \in Q^i_{(st)}$, $X_e^{3-j} \in Q^{3-i}_{(st)}$. Тогда либо $s \in X_e^c \cap T \subseteq X_e^j \cap T \not\ni t$, либо $s \in X_e^j \cap T \subset X_e^c \cap T \not\ni t$, и, согласно лемме 6.4, $\varkappa^{Q'(st)} = \varkappa^{Q(st)}$, где $Q'_{(st)} = Q_{(st)} \Diamond X_e^j X_e^c$. Множества $X_e^j \cap X_e^c$ и $X_e^j \cup X_e^c$ отнесем к тому же самому семейству $Q'^i_{(st)}$, тогда новая предупаковка $Q'_{(st)}$ будет разделяющейся □

6.5. Скажем, что элемент $X \in \hat{Q}$ имеет тип T_β, если $X^T = T_\beta$. Обозначим через $\hat{Q}_{T_\beta}$ непустую совокупность всех элементов в $\hat{Q}$, имеющих тип T_β, и пусть I – множество

типов для $\hat{Q}$ ($\hat{Q} = \cup(\hat{Q}_{T_\beta} : \beta \in I)$). Семейство $\hat{Q}$ называется внутренне параллельным, если для любых $X_1, X_2 \in Q$ таких, что $X_1^T \parallel X_2^T$, справедливо $X_1 \parallel X_2$.

Лемма 6.7. Пусть $\hat{Q}$ – внутренне параллельное семейство, и $X_1, X_2 \in Q$. Тогда: (а) если $X_1^T = X_2^T$, то либо $X_1 \subseteq X_2$ либо $X_2 \subset X_1$, (б) если $X_1^T \subset X_2^T$, то $X_1 \subset X_2$, (в) если $X_1^T \cap X_2^T = \emptyset$, то $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

Доказательство следует из того, что в противном случае – $X_1 \nparallel X_2$ □

Следующий алгоритм преобразует произвольное семейство $\hat{Q}$ во внутренне параллельное семейство $\hat{Q}^*$.

Алгоритм внутреннего распараллеливания (АВП). Пусть $\hat{Q}^i$ – подсемейство элементов, уже просмотренных к началу i-й (текущей) итерации алгоритма. На i-й итерации произвольно выбирается элемент $X_i \in \hat{Q} \setminus \hat{Q}^i$ такого типа T_ε, что любой элемент $X' \in \hat{Q}$ типа $T_\beta : T_\beta \subset T_\varepsilon$ – уже просмотренный. На очередном шаге i-й итерации произвольно выбирается такой элемент $X \in \hat{Q} \setminus \hat{Q}^i \setminus \{X_i\}$ (типа T_γ), что $X_i \nparallel X$ и $X_i^T \parallel X^T$.
(а) Если $T_\varepsilon \subseteq T_\gamma$, то полагаем $X_i := X_i \cap X$, $X := X_i \cup X$, (б) если $T_\varepsilon \cap T_\gamma = \emptyset$, то полагаем $X_i := X_i \cap \bar{X}$, $X := X \cap \bar{X}_i$. Как только для текущего элемента X_i будет выполняться свойство $\forall X \in \hat{Q} \setminus \hat{Q}^i \setminus \{X_i\}$ $(X_i^T \parallel X^T \Rightarrow X_i \parallel X)$, итерация оканчивается и элемент X_i считается просмотренным.

Лемма 6.8. (а) Алгоритм АВП оканчивается через не более, чем $|V| \cdot |\hat{Q}|$ шагов (по всем итерациям). (б) Результирующее семейство $\hat{Q}^*$ – внутренне параллельное. (в) $\varkappa^{\hat{Q}^*} = \varkappa^{\hat{Q}}$
(г) $\lambda^{\hat{Q}} - \lambda^{\hat{Q}^*} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из того, что на каждом шаге i-й итерации множество X_i уменьшается по крайней мере на одну вершину. Утверждение (в) следует из леммы 6.4, а утверждение (г) – из леммы 6.3. Докажем (б). Заметим вначале, что, по условию выбора X_i, в результате шага элементы X_i и X сохраняют свои типы. Пусть к началу очередного шага i-й итерации для каждого просмотренного элемента X' выполняется свойство $\forall X'' \in \hat{Q} (X'^T \parallel X''^T \Rightarrow X' \parallel X'')$. Пусть X' – просмотренный элемент и $X'^T \parallel X_i^T$, $X'^T \parallel X^T$. Поскольку $X_i \nparallel X$, то множество X' или множество $\bar{X}'$ целиком содержится в одном из множеств $X_i \cap X, X_i \cap \bar{X}, \bar{X}_i \cap X$ или $\bar{X}_i \cap \bar{X}$, откуда для элементов X_i, X, полученных в результате шага, справедливо $X_i \parallel X'$ и $X \parallel X'$. Проверка случаев $X'^T \parallel X_i^T$, $X'^T \nparallel X^T$ и $X'^T \nparallel X_i^T$, $X'^T \parallel X^T$ оставляется читателю □

Пусть $\widehat{Q} = \bigcup(\widehat{Q}_{T_\beta} : \beta \in I)$ – внутренне параллельное семейство. Для каждого подмножества T_β выделим в $\widehat{Q}_{T_\beta}$ максимальное множество, которое обозначим X_{T_β}, существование такого $X_{T_\beta} \in \widehat{Q}_{T_\beta}$ следует из леммы 6.7. Определим в $\{X_{T_\beta} : \beta \in I\}$ подмножество $\mathcal{R}_{\widehat{Q}} = \{X_{T_\beta} : \beta \in I, T_\beta \not\subset T_\gamma \ \forall \gamma \in I\}$. Из леммы 6.7 следует

<u>Лемма 6.9</u>. Пусть $\widehat{Q}$ – внутренне параллельное семейство. Тогда для любого $X \in \widehat{Q}$ существует такой элемент $X_{T_\beta} \in \mathcal{R}_{\widehat{Q}}$, что $X \subseteq X_{T_\beta}$ □

6.6. Изложим идею алгоритма $ALOCK$, решающего задачу $LOCK(V, U, \ell)$ для квазичетной функции ℓ и $H = (T, U) \in \{K_4, C_5\}$. Случай $H \in \mathfrak{X}^2$ будет впоследствии сведен к случаю $H = K_4$. Для произвольного семейства Q через $\varkappa^Q_U$ будем обозначать ограничение функции $\varkappa^Q$ на множество U.

Перед началом алгоритма определяется некоторой исходный мультиразрез $Q^{нач}$, такой, что $\ell - \lambda^{Q^{нач}} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$. Существование такого мультиразреза будет доказано в разделе 6.II.

Алгоритм $ALOCK$ состоит из $|U|$ этапов. На очередном этапе выбирается произвольное еще непросмотренное ребро $[st] \in U$, и уже имеющийся к началу этапа мультиразрез Q (для которого $\ell - \lambda^Q \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$) преобразуется в мультиразрез Q^*, такой, что

$$\varkappa^{Q^*}_U \geqslant \varkappa^Q_U, \quad \varkappa^{Q^*}[st] = \mu_\ell[st], \qquad (6.3)$$

$$\ell - \lambda^{Q^*} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}. \qquad (6.4)$$

Этап алгоритма (проводимый в случае $\varkappa^Q[st] < \mu_\ell[st]$) состоит из одной подготовительной и некоторого числа основных итераций. <u>Подготовительная итерация</u> состоит из стадии А и стадии Б в случае $H = C_5$ и из одной стадии Б – в случае $H = K_4$. Стадия А будет описана в 6.9.

<u>На стадии Б</u> семейство Q разбивается на подсемейства $Q_{(st)} = \{X \in Q : [st] \in [X, \bar{X}]\}$ и $\bar{Q} = \{X \in Q : \{s,t\} \subseteq X$ или $\{s,t\} \subseteq \bar{X}\}$ и производится $\{t\}$-ориентирование семейства $Q_{(st)}$ и $\{s,t\}$-ориентирование семейства $\bar{Q}$ (полученные семейства будем по-прежнему обозначать $Q_{(st)}$ и $\bar{Q}$). Затем $\bar{Q}$ преобразуется во внутренне параллельное семейство при помощи алгоритма АВП

(сохраним прежние обозначения $\bar{Q}$ и Q за соответствующими семействами).

На каждой <u>основной итерации</u> этапа текущий мультиразрез Q (для которого пока $\varkappa_Q[st] < \mu_\ell[st]$) перестраивается в мультиразрез Q', такой, что

$$\varkappa^{Q'}_U > \varkappa^Q_U, \quad \varkappa^{Q'}[st] = \varkappa^Q[st] + 2, \qquad (6.5)$$

и итерации проводятся до тех пор, пока ребро $[st]$ не окажется запертым. В начале итерации из $\bar{Q}$ удаляются все элементы множества $\mathcal{R}_{\bar{Q}}$. Пусть $\bar{Q}' = \bar{Q} \setminus \mathcal{R}_{\bar{Q}}$ и $\ell' = \ell - \lambda^{\bar{Q}'}$.

<u>Лемма 6.10</u>. Пусть $\varkappa^Q[st] < \mu_\ell[st]$. Тогда для сети (V, T, ℓ') и семейства $Q_{(st)}$ существует увеличивающее множество X, причем такое, что $X \cap X' = \emptyset$ для всех $X' \in \bar{Q}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $L = [s = x_0 x_1 \ldots x_k = t]$ – кратчайшая цепь в сети (V, T, ℓ'), и пусть $Z = \bigcup(X' : X' \in \bar{Q}) = \bigcup(X'' : X'' \in \mathcal{R}_{\bar{Q}})$ (см. лемму 6.9). Поскольку в сети (V, T, ℓ') все ребра разреза $[Z, \bar{Z}]$ – не насыщены мультиразрезом $Q_{(st)}$, то в силу предложения 5.I, из $\varkappa^{Q_{(st)}}[st] = \mu_{\ell'}[st]$ следовало бы $L \cap (\bigcup(X' : X' \in \bar{Q})) = \emptyset$, т.е. $\mu_{\ell'}[st] = \mu_\ell[st]$, что невозможно. Таким образом $\mu_{\ell'}[st] > \varkappa^{Q_{(st)}}[st]$ и по лемме 6.I для (V, T, ℓ') и $Q_{(st)}$ существует увеличивающее множество. Для произвольного увеличивающего множества $\tilde{X}$ множество $\tilde{X}' = \tilde{X} \cap \bar{Z}$ – также увеличивающее □

Пусть X – увеличивающее множество (для (V, T, ℓ') и $Q_{(st)}$) построенное на рассматриваемой итерации при помощи алгоритма АУМ. Согласно лемме 6.10 и замечанию 6.I $X \cap (\bigcup(X' : X' \in \bar{Q})) = \emptyset$. Из семейства $Q_{(st)}$ и увеличивающего множества X будет построена разделяющаяся предупаковка $Q'_{(st)}$ (относительно функции ℓ'), для которой будет справедливо

$$\varkappa^{Q'_{(st)} \cup \bar{Q}'}_U > \varkappa^Q_U, \quad \varkappa^{Q'_{(st)} \cup \bar{Q}'}[st] = \varkappa^Q[st] + 2, \qquad (6.6)$$

$$\ell' - \lambda^{Q'_{(st)}} = \ell - \lambda^{Q'_{(st)} \cup \bar{Q}'} \in 2\mathbb{Z}^{[V]}, \quad \ell' - \lambda^{Q'_{(st)}} \geqslant -2. \qquad (6.7)$$

Далее к $Q'_{(st)}$ применяется алгоритм АПП и находится мультиразрез $Q''_{(st)}$, допустимый в сети (V, T, ℓ'). Таким образом, для окончательного мультиразреза $Q' = Q''_{(st)} \cup \bar{Q}'$, ввиду (6.6) и леммы 6.5, будет справедливо (6.5). Далее полагаем $Q_{(st)} := Q''_{(st)}$, $\bar{Q} := \bar{Q}'$, $Q := Q'$ и переходим к следующей основной итерации.

Осталось описать центральное место в основной итерации – способ построения разделяющейся предупаковки $Q'_{(st)}$. Ее построение, вообще говоря, зависит и от вида множества $\mathfrak{R}_{\bar{Q}}$, и от типов элементов в $Q_{(st)}$, и от типа увеличивающего множества X. Вначале при помощи X образуются некоторые два множества X_1 и X_2. В "простом" случае полагается $Q'_{(st)} = Q_{(st)} \cup \{X_1, X_2\}$. В "сложных" случаях из $Q_{(st)}$ выделяется некоторое подсемейство $\mathfrak{R}$, из $\mathfrak{R}$, X_1 и X_2 образуется новое семейство $\mathfrak{R}'$, и полагается $Q'_{(st)} = (Q_{(st)} \setminus \mathfrak{R}) \cup \mathfrak{R}'$. Отметим, что семейство $Q_{(st)}$ всегда будет иметь стандартное разложение на подсемейства $Q^1_{(st)}$ и $Q^2_{(st)}$, каждое из которых параллельно на полюсах (для случая $H=K_4$ это разложение получается автоматически, а для случая $H=C_5$ – это будет результатом проведения стадии А на подготовительной итерации).

Опишем два основных принципа построения X_1, X_2.

<u>Треугольный принцип</u> применяется в том случае, когда $\mathfrak{R}_{\bar{Q}}$ состоит из единственного элемента $X_{T'}$. Положим $X_1 = X$, $X_2 = X \cup X_{T'}$ (см. рис. 6.1). Справедливость следующей леммы проверяется непосредственно.

<u>Лемма 6.II.</u> Пусть $\ell - \lambda^Q \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$, $\bar{Q} = Q \setminus \{X_{T'}\} \cup \{X_1, X_2\}$, $Y = V \setminus (X \cup X_{T'})$. Тогда: (а) $\ell - \lambda^{\bar{Q}} \in 2\mathbb{Z}^{[V]}$, $\ell - \lambda^{\bar{Q}} \geq -2$, (б) если $\ell(e) - \lambda^{\bar{Q}}(e) = -2$, то $e \in [X, Y]$, (в) $\varkappa^{\bar{Q}}[s't'] = \varkappa^Q[s't'] + 2$ для $s' \in X^T$, $t' \in Y^T$ и $\varkappa^{\bar{Q}}[s't'] = \varkappa^Q[s't']$ для $s' \in T'$, $t' \in T \setminus T'$. □

<u>Четырехугольный принцип</u> применяется в том случае, когда $\mathfrak{R}_{\bar{Q}}$ состоит из двух элементов $X_{T'}$ и $X_{T''}$ таких, что $X_{T'} \cap X_{T''} = \emptyset$. Положим $X_1 = X \cup X_{T'}$, $X_2 = X \cup X_{T''}$ (рис.6.2). Справедлива следующая лемма (доказательство осталяем читателю).

<u>Лемма 6.I2</u>. Пусть $\ell - \lambda^Q \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$, $\bar{Q} = Q \setminus \{X_{T'}, X_{T''}\} \cup \{X_1, X_2\}$ и $Y = V \setminus (X \cup X_{T'} \cup X_{T''})$. Тогда: (а) $\ell - \lambda^{\bar{Q}} \in 2\mathbb{Z}^{[V]}$, $\ell - \lambda^{\bar{Q}} \geq -2$, (б) если $\ell(e) - \lambda^{\bar{Q}}(e) = -2$, то $e \in [X, Y]$, (в) $\varkappa^{\bar{Q}}[s't'] = \varkappa^Q[s't'] + 2$ для $s' \in X^T$, $t' \in Y^T$ и $\varkappa^{\bar{Q}}[s't'] = \varkappa^Q[s't']$ для остальных $[s't']$ в $[T']$ □

<u>Замечание 6.3</u>. Пусть семейство D – параллельное на полюсах и $X' \subset V$ – однополюсное подмножество, т.е. $X' \cap T = \{s'\}$ или $= T \setminus \{s'\}$ для некоторого $s' \in T$. Тогда семейство $D \cup \{X'\}$ – также параллельное на полюсах.

В дальнейшем нам будет удобно применять следующие обозначения. Тип множества X' может быть обозначен как через T' (где $T' = X' \cap T$), так и через $\overline{T \setminus T'}$. Тип $T' = \{a, b, \ldots, d\}$ будем

обозначать сокращенно через $ab\ldots d$. Эти обозначения будем применять и для элементов в $\mathfrak{R}_{\bar{Q}}$; так, например, если $T = \{s, t, p, q, r\}$, $T' = \{p, q\}$, то элемент $X_{T'}$ будет обозначаться X_{pq} или $X_{\overline{str}}$.

6.7. <u>Алгоритм $ALOCK(H)$ для $H = K_4$</u>. Достаточно описать способ построения разделяющейся предупаковки $Q'_{(st)}$ на очередной основной итерации этапа. Пусть $T = \{s, t, p, q\}$. Семейство $Q_{(st)}$ может состоять только из элементов, имеющих типы s, $\bar{t}$, sp, sq. К подсемейству $Q^1_{(st)}$ отнесем все элементы типа sp, а к подсемейству $Q^2_{(st)}$ – все элементы типа sq. Однополюсные элементы в $Q_{(st)}$ в соответствии с замечанием 6.3, могут быть распределены по семействам $Q^i_{(st)}$ произвольно. Возможны следующие варианты построения разделяющейся предупаковки $Q'_{(st)}$, имеющей разбиение на два подсемейства $Q'^1_{(st)}$ и $Q'^2_{(st)}$.

<u>Случай I.</u> $\mathfrak{R}_{\bar{Q}} = \{X_{pq}\}$. В этом случае X_1, X_2 строятся по треугольному принципу. Тогда X_1 имеет тип s, а X_2 – тип $\bar{t}$. $Q'^1_{(st)} = Q^1_{(st)} \cup \{X_1\}$, $Q'^2_{(st)} = Q'^2_{(st)} \cup \{X_2\}$.

<u>Случай 2.</u> $\mathfrak{R}_{\bar{Q}} = \{X_p, X_q\}$. Множества X_1, X_2 строятся по четырехугольному принципу. Тогда (с точностью до перестановки p и q) X_1 имеет тип sp, а X_2 – тип sq. $Q'^i_{(st)} = Q^i_{(st)} \cup \{X_i\}$, $i = 1, 2$.

<u>Случай 3.</u> $\mathfrak{R}_{\bar{Q}} = \{X_p\}$ (симметричный случай – $\mathfrak{R}_{\bar{Q}} = \{X_q\}$). Множества X_1, X_2 строятся по треугольному принципу. Возможны два подслучая: (а) $X \cap T = \{s\}$, тогда X_1 имеет тип s, а X_2 – тип sp; полагаем $Q'^1_{(st)} = Q^1_{(st)} \cup \{X_2\}$, $Q'^2_{(st)} = Q^2_{(st)} \cup \{X_1\}$; (б) $X \cap T = \{s, q\}$, тогда X_1 имеет тип sq, а X_2 – тип $\bar{t}$; полагаем $Q'^1_{(st)} = Q^1_{(st)} \cup \{X_2\}$, $Q'^2_{(st)} = Q^2_{(st)} \cup \{X_1\}$.

<u>Случай 4.</u> $\mathfrak{R}_{\bar{Q}} = \emptyset$ (т.е. $\bar{Q} = \emptyset$). Положим $X_1 = X_2 = X$. Возможны следующие подслучаи (симметричные варианты мы опускаем).
(а) X имеет тип s. Тогда $Q'^i_{(st)} = Q^i_{(st)} \cup \{X_i\}$, $i = 1, 2$.
(б) X имеет тип sp. (ба) Если в $Q_{(st)}$ нет элементов типа sq, то $Q'^i_{(st)} = Q^i_{(st)} \cup \{X_i\}$, $i = 1, 2$. (бб) В $Q_{(st)}$ есть элемент $\tilde{X}$ типа sq. Образуем множества $\tilde{X}_1 = X_2 \cap X$, $\tilde{X}_2 = X_2 \cup \tilde{X}$, тогда $\tilde{X}_1$ имеет тип s, а $\tilde{X}_2$ – тип $\bar{t}$. Положим $Q'^1_{(st)} = Q^1_{(st)} \cup \{X_1\}$, $Q'^2_{(st)} = Q^2_{(st)} \setminus \{\tilde{X}\} \cup \{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2\}$.

Справедливость (6.6) и (6.7) в случаях I,2,3 непосредственно следует из лемм 6.II, 6.I2. В случаях 4а, 4ба справедливость (6.6) и (6.7) – очевидна. Наконец, в случае 4бб (6.6) следует из того, что $\varkappa^{\{X_1,\tilde X_1,\tilde X_2\}}[s't'] - \varkappa^{\{\tilde X\}}[s't']$ равно 2 для $[s't'] \in \{[st],[sq],[tp]\}$ и равно 0 – для $[s't'] \in \{[sp],[tq],[pq]\}$, а (6.7) следует из леммы 6.3. Более подробную проверку оставляем читателю.

Этим заканчивается описание алгоритма для $H = K_4$.

6.8. <u>Решение задачи для $H \in \mathfrak{X}^2$.</u> Пусть H является объединением звезд Z_r (с ребрами $[sp_i]$, $i=1,\dots,r$) и Z_m (с ребрами $[tq_j]$, $j=1,\dots,m$). Достаточно рассмотреть нетривиальный случай $s \neq t$, $r,m \geq 1$. Покажем, как свести эту задачу к задаче о запирании со схемой $H' = M_2 \subset K_4$ (M_2 – граф, являющийся паросочетанием из двух ребер). Для заданных $V \supseteq T$ и $\ell \in R_+^{[V]}$ положим $\gamma_1 = \max\{\mu_\ell[sx] : x \in V\}$, $\gamma_2 = \max\{\mu_\ell[ty] : y \in V\}$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Добавим к V новые полюса p и q и определим $\ell' \in R_+^{[V']}$ как $\ell'(e) = \ell(e)$ для $e \in [V]$, $\ell'[px] = \gamma - \mu_\ell[sx]$, $\ell'[qx] = \gamma - \mu_\ell[tx]$ для $x \in V$ и $\ell'[pq] = 2\gamma - \mu_\ell[st]$. Легко проверить, что $\mu_{\ell'}[sp] = \mu_{\ell'}[tq] = \gamma$, и более того, если $L_{sp_i} = [s\dots p_i]$ ($L_{tq_j} = [t\dots q_j]$) является кратчайшей цепью относительно ℓ, то цепь $L_{sp} = [s\dots p_i p]$ (соответственно, $L_{tq} = [t\dots q_j q]$) – кратчайшая относительно ℓ'. Пусть Q' – мультиразрез в сети (V', T', ℓ') (где $T' = \{s,t,p,q\}$), запирающей ребра $[sp]$ и $[tq]$. Тогда мультиразрез Q, состоящий из элементов $X \cap V$ для всех $X \in Q'$, таких, что $X \cap V \neq \emptyset$, является решением исходной задачи. Это следует из предложения 5.I (поскольку Q' насыщает каждую кратчайшую цепь L_{sp} (L_{tq}), то это же самое верно для Q и кратчайшей цепи L_{sp_i} (L_{tq_j}).

6.9. <u>Алгоритм $ALOCK(H)$ для $H = C_5$.</u> Пусть $T = \{s,t,p,q,r\}$ и $U = \{[st],[tr],[rq],[qp],[ps]\}$. Пусть к началу этапа, заключающегося в запирании ребра $[st]$, уже имеется допустимый мультиразрез Q, для которого $\ell - \lambda^Q \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$. Докажем вначале следующие леммы. Обозначим s,t,r,q,p через s_0,s_1,s_2,s_3,s_4, соответственно.

<u>Лемма 6.I3</u>. Пусть $X_1, X_2 \in Q$, $X' = X_1 \cap X_2$, $X'' = X_1 \cup X_2$, $\tilde Q = Q \setminus \{X_1, X_2\} \cup \{X', X''\}$. Тогда: (а) если $X_1^T = \{s_{i-1}, s_i\}$ и $X_2^T = \{s_i, s_{i+1}\}$, то $\varkappa_U^{\tilde Q} = \varkappa_U^Q$; (б) если $X_1^T = \{s_{i-1}, s_i\}$ и $X_2^T = \{s_i, s_{i+2}\}$ (или, симметрично, $X_2^T = \{s_{i-1}, s_{i-3}\}$), то $\varkappa_U^{\tilde Q} = \varkappa_U^Q$ (индексы при полюсах берутся по модулю 5).

<u>Доказательство</u>. В случае (а) обе величины $\varkappa^{\{X_1,X_2\}}[s_j s_{j+1}]$

и $\varkappa^{\{X',X''\}}[s_j s_{j+1}]$ равны I для $j \in \{i-1, i, i+1, i-2\}$ и равны 0 для $j = i+2$. В случае (б) эти же величины равны 2 для $j = i$ и равны I для $j \in \{i-1, i+1, i+2, i-2\}$ □

<u>Лемма 6.I4</u>. Пусть $X_1, X_2 \in Q$, $X_1^T = \{s_i\}$, $X_2^T = \{s_{i+1}\}$ (или, симметрично, $X_2^T = \{s_{i-2}\}$), $X' = X_1 \cup X_2$, $\tilde Q = Q \setminus \{X_1, X_2\} \cup \{X'\}$. Тогда $\varkappa_U^{\tilde Q} = \varkappa_U^Q$.

<u>Доказательство</u>. Обе величины $\varkappa^{\{X_1,X_2\}}[s_j s_{j+1}]$ и $\varkappa^{\{X'\}}[s_j s_{j+1}]$ равны I для $j \in \{i-1, i, i+1, i+2\}$ и равны 0 – для $j = i-2$ □

На стадии А подготовительной итерации этапа производится последовательное преобразование Q в соответствии с леммами 6.I3 и 6.I4. А именно, если в текущем мультиразрезе Q имеются элементы X_1, X_2, удовлетворяющие одному из условий в леммах 6.I3 и 6.I4, то на очередном шаге Q преобразуется в $\tilde Q$ (затем полагается $Q := \tilde Q$), и так до тех, пока все такие пары элементов не исчезнут.

<u>Лемма 6.I5.</u> Число шагов на стадии А не более $3M$, где M – число элементов в начальном семействе Q.

<u>Доказательство</u>. Пусть в начальном Q имеется M_1 однополюсных элементов и M_2 двухполюсных элементов (т.е. таких элементов X, что $\min\{|X^T|, |\bar X^T|\} = 2$). Пусть, далее, на стадии было выполнено d_1 шагов преобразований с парами X_1, X_2, удовлетворяющими условиям леммы 6.I3 (шаги I-го типа), и d_2 шагов с X_1, X_2, удовлетворяющими условиям леммы 6.I4 (шаги 2-го типа). На шаге I-го типа число однополюсных элементов увеличивается на I, а число двухполюсных – уменьшается на I. На шаге 2-го типа число однополюсных элементов уменьшается на 2, а число двухполюсных – увеличивается на I. Следовательно, $d_2 < M$ и $d_1 < M_2 + d_2$, откуда $d_1 + d_2 < 3M$ □

Стадия Б подготовительной итерации проводится так, как описано в 6.6. Пусть $Q = Q_{(st)} \cup \tilde Q$ – мультиразрез, полученный в результате подготовительной итерации. Из леммы 6.3 следует $\ell - \lambda^Q \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$, а из лемм 6.8, 6.I3 и 6.I4 следует, что функция $\varkappa_U^Q$ – та же самая, что и у мультиразреза в начале этапа.

В $Q_{(st)}$ априори могут содержаться двухполюсные элементы типов sp, , sr, $\bar t p$, $\bar t q$, $\bar t r$. Эти возможные типы разобьем на две группы: <u>группу А</u>, состоящую из типов $sp, sr, \bar t q$, и <u>группу Б</u>, состоящую из типов $sq, \bar t p, \bar t r$ (см. рис. 6.3). К семейству $Q^1_{(st)}$ отнесем все двухполюсные элементы из $Q_{(st)}$ с типами из группы А, а к семейству $Q^2_{(st)}$ – все двухполюсные элементы из $Q_{(st)}$ с типами из группы В (однополюсные элементы из $Q_{(st)}$ в соответствии с замечанием 6.3 распределяются произвольно).

Лемма 6.16. В результате проведения стадии А подготовительной итерации каждое семейство $Q^i_{(st)}$, $i=1,2$, становится параллельным на полюсах.

Действительно, после проведения стадии А подготовительной итерации в $Q^1_{(st)}$ не могут одновременно содержаться элементы типов sp и sr, а в $Q^2_{(st)}$ – элементы типов $\overline{tp}, \overline{tr}$ $\square$

Обозначим через τ^i множество типов двухполюсных элементов в $Q^i_{(st)}$.

Каждая основная итерация этапа проводится по схеме, изложенной в 6.6. А именно, в сети (V,T,ℓ') (где $\ell'=\ell-\lambda^{\bar Q'}$, $\bar Q'=\bar Q\setminus\mathcal{R}_{\bar Q}$) отыскивается увеличивающее множество X, при помощи которого по треугольному, четырехугольному или иному принципу образуются множества X_1, X_2. При этом будет выполнено:

$$\varkappa^{\tilde Q}_U > \varkappa^Q_U, \quad \varkappa^{\tilde Q}[st] = \varkappa^Q[st]+2, \tag{6.8}$$

$$\ell'-\lambda^{\tilde Q_{(st)}} \in 2\mathbb{Z}^{[V]}, \quad \ell'-\lambda^{\tilde Q_{(st)}} \geqslant -2, \tag{6.9}$$

$$\text{если } \ell'(e)-\lambda^{\tilde Q_{(st)}}(e)=-2, \text{ то } e\in[X_1,\bar X_1],[X_2,\bar X_2], \tag{6.10}$$

где $\tilde Q_{(st)}=Q_{(st)}\cup\{X_1,X_2\}$, $\tilde Q=\tilde Q_{(st)}\cup\bar Q'$.

Разделяющаяся предупаковка $Q'_{(st)}=Q'^1_{(st)}\cup Q'^2_{(st)}$ будет образовываться по простому или сложному правилу.

Простое правило образования $Q'_{(st)}$ применяется в каждом из следующих случаев: (а) X_1, X_2 – однополюсные множества, (б) одно из множеств X_1, X_2 – двухполюсное (скажем, X_1), а другое – однополюсное, (в) X_1, X_2 – двухполюсные множества, типы которых принадлежат разным группам А и Б. В случае (а) полагаем $Q'^1_{(st)}=Q^1_{(st)}\cup\{X_j\}$, $Q'^2_{(st)}=Q^2_{(st)}\cup\{X_{3-j}\}$ для произвольного $j\in\{1,2\}$. Рассмотрим случаи (б) и (в). Пусть, для определенности, тип множества X_1 принадлежит группе А. Если $X_1^T \parallel \tilde X^T$ для любого $\tilde X\in Q^1_{(st)}$, то полагаем $Q'^1_{(st)}=Q^1_{(st)}\cup\{X_1\}$. Если же $X_1^T \nparallel \tilde X^T$ для некоторого $\tilde X\in Q^1_{(st)}$ (тогда, очевидно, одно из множеств $X_1, \tilde X$ имеет тип sp, а другое – $\overline{sr}$), то образуем множества $X_1\cap\tilde X$ (типа s) и $X_1\cup\tilde X$ (типа $\overline{tq}$) и полагаем $Q'^1_{(st)}=Q^1_{(st)}\setminus\{\tilde X\}\cup\{X_1\cap\tilde X, X_1\cup\tilde X\}$. В случае (б) полагаем $Q'^2_{(st)}=Q^2_{(st)}\cup\{X_2\}$, а

в случае (в) семейство $Q'^2_{(st)}$ образуем из $Q^2_{(st)}$ и X_2 способами, аналогичными описанным способам образования $Q'^1_{(st)}$. Во всех случаях семейства $Q'^i_{(st)}$ оказываются параллельными на полюсах и, ввиду леммы 6.13, $\varkappa^{Q'^i_{(st)}}_U=\varkappa^{Q^i_{(st)}\cup\{X_i\}}_U$.

Сложное правило образования $Q'_{(st)}$ применяется, если X_1, X_2 – двухполюсные множества, типы которых принадлежат одной группе. Пусть их типы принадлежат той же группе, что и возможные типы двухполюсных элементов семейства $Q^i_{(st)}$. Выбирается некоторое $j\in\{1,2\}$, и $Q'^i_{(st)}$ образуется из $Q^i_{(st)}$ и X_j тем же способом, что и при простом правиле. Далее, если $X^T_{3-j}\parallel\tilde X^T$ для всех $\tilde X\in Q^{3-i}_{(st)}$, то полагаем $Q'^{3-i}_{(st)}=Q^{3-i}_{(st)}\cup\{X_{3-j}\}$. Если же это неверно, то семейство $Q'^{3-i}_{(st)}$ образуется из $Q^{3-i}_{(st)}$ и X_{3-j} путем распараллеливания с некоторым элементом $\tilde X$ из $Q^{3-i}_{(st)}$, таким, что $X^T_{3-j}\nparallel\tilde X^T$, а затем возможно еще одно распараллеливание с другим элементом $\tilde X'\in Q^{3-i}_{(st)}$. При этом в каждом конкретном случае индекс j и способ распараллеливания в $Q^{3-i}_{(st)}\cup\{X_{3-j}\}$ будут выбраны таким образом, что будут справедливы соотношения (6.6), хотя и окажется $\varkappa^{Q'^{3-i}_{(st)}}_U<\varkappa^{Q^{3-i}_{(st)}\cup\{X_{3-j}\}}_U$. Возможные способы распараллеливания приведены на рис. 6.4. (сплошными линиями обозначены элементы, относящиеся к типам из разных групп, а пунктирными линиями – результат их распараллеливания; числа на ребрах указывают, на сколько уменьшаются при распараллеливании значения функции $\varkappa_U$).

Рассмотрим теперь конкретные случаи построения X_1, X_2 и $Q'_{(st)}$, зависящие от множеств $\mathcal{R}_{\bar Q}$, τ^1, τ^2 и типа увеличивающего множества X; здесь мы учитываем результат проведения стадии А подготовительной итерации. Виды множеств $\mathcal{R}_{\bar Q}$, соответствующие рассматриваемым случаям, приведены на рис. 6.5. Мы опускаем ситуации, симметричные рассматриваемым.

<u>Случай 1.</u> $\mathcal{R}_{\bar Q}=\{X_{\bar s\bar r}\}$. Множества X_1, X_2 строятся по треугольному принципу, а $Q'_{(st)}$ – по простому правилу.

<u>Случай 2.</u> $\mathcal{R}_{\bar Q}=\{X_p, X_{qr}\}$. Четырехугольный принцип. Простое правило.

<u>Случай 3</u> $\mathcal{R}_{\bar Q}=\{X_{pr}, X_q\}$. Четырехугольный принцип. Простое правило.

<u>Случай 4.</u> $\mathcal{R}_{\bar Q}=\{X_{pq}, X_{pr}\}$. Очевидно, увеличивающее множество X имеет тип s. Полагаем $X_1=X\cup X_{pq}\setminus X_{pr}$ (X_1 имеет тип sq), и $X_2=X\cup X_{pr}\setminus X_{pq}$ (X_2 имеет тип sr).

$Q'_{(st)}$ строится по простому правилу. Справедливость (6.8) - (6.10) проверяется непосредственно.

<u>Случай 5.</u> $\mathcal{R}_{\bar{Q}}=\{X_{qr}\}$. Треугольный принцип. В обоих подслучаях действует простое правило.

<u>Случай 6</u>. $\mathcal{R}_{\bar{Q}}=\{X_{pr}\}$. Треугольный принцип. В обоих подслучаях действует простое правило.

<u>Случай 7</u>. $\mathcal{R}_{\bar{Q}}=\{X_q, X_r\}$. Четырехугольный принцип. В обоих подслучаях действует простое правило.

<u>Случай 8</u>. $\mathcal{R}_{\bar{Q}}=\{X_r\}$. Треугольный принцип. (а) $X^T=\{s\}$. Простое правило. (б) $X^T=\{s,p,q\}$. Простое правило. (в) $X^T=\{s,p\}$ (X_1 имеет тип sp , а X_2 - тип $\bar{tq}$). Тогда $\varkappa^{\bar{Q}}[pq]+2=\varkappa^{\bar{Q}'\cup\{X_1,X_2\}}[pq]$. Сложное правило. Q'^1 образуем при помощи X_2 . Если $\bar{tp}\in\tau^2$, то распараллеливание $V2$. Если $\bar{tp}\notin\tau^2, sq\in\tau^2$, то распараллеливание $V1$. (г) $X^T=\{s,q\}$ (X_1 имеет тип sq, X_2 - тип $\bar{tp}$). Тогда $\varkappa^{\bar{Q}}[pq]+2=\varkappa^{\bar{Q}'\cup\{X_1,X_2\}}[pq]$. Сложное правило. $Q'^2_{(st)}$ образуется при помощи X_1 . Если $sp\in\tau^1$, то распараллеливание $V2$. Если $sp\notin\tau^1$, $\bar{tq}\in\tau^1$, то распараллеливание $V5$.

<u>Случай 9.</u> $\mathcal{R}_{\bar{Q}}=\{X_q\}$. Треугольный принцип. (а) $X^T=\{s\}$. Простое правило. (б) $X^T=\{s,p,q\}$. Простое правило. (в) $X^T=\{s,p\}$ (тогда X_1 имеет тип sp, X_2 - тип $\bar{tr}$). Простое правило. (г) $X^T=\{s,r\}$ (тогда X_1 имеет тип sr, X_2 - тип $\bar{tp}$). Простое правило.

<u>Случай 10.</u> $\mathcal{R}_{\bar{Q}}=\emptyset$. Тогда $X_1=X_2=X$. (а) $X^T=\{s\}$ Простое правило. (б) $X^T=\{s,p,q,r\}$. Простое правило. (в) $X^T=\{s,p\}$. Тогда $\varkappa^{\bar{Q}'\cup\{X_1,X_2\}}[pq]=\varkappa^{\bar{Q}}[pq]+2$. Сложное правило. Если $\bar{tp}\in\tau^2$, то распараллеливание $V2$. Если $\bar{tp}\notin\tau^2$, $sq\in\tau^2$, то распараллеливание $V1$. (г) $X^T=\{s,p,q\}$. Этот случай симметричен случаю (в). (д) $X^T=\{s,q\}$. Тогда $\varkappa^{\bar{Q}'\cup\{X_1,X_2\}}[s't']=\varkappa^{\bar{Q}}[s't']+2$ для $[s't']\in\{[pq],[qr]\}$. Сложное правило. (да) $\bar{tq}\in\tau^1$, распараллеливание $V6$. (дб) $\bar{tq}\notin\tau^1$, $sr\in\tau^1$. Распараллеливание $V3$.

Если теперь $sp\in\tau^1$, то - второе распараллеливание $V2$. (дв) $\bar{tq}, sr\notin\tau^1$, $sp\in\tau^1$. Распараллеливание $V1$. (е) $X^T=\{s,r\}$. Тогда $\varkappa^{\bar{Q}'\cup\{X_1,X_2\}}[qr]=\varkappa^{\bar{Q}}[qr]+2$. Сложное правило. Если $\bar{tr}\in\tau^2$, то распараллеливание $V4$. Если $\bar{tr}\notin\tau^2$, $sq\in\tau^2$, то распараллеливание $V3$.

Этим оканчивается описание алгоритма для $H=C_5$. Необходимые проверки оставляем читателю.

6.10. Оценим число действий алгоритма $ALOCK$. Число этапов алгоритма - не более 6. Согласно леммам 6.8, 6.15, число действий на подготовительной итерации этапа - $O(P_1(|V|)M)$, где $P_1(n)$ - полином, а M - число элементов в начальном семействе Q , очевидно, не превосходящее $\ell[V]=\sum(\ell(e): e\in[V])$. Каждая основная итерация этапа требует $O(P_2(|V|))$ действий, где $P_2(n)$ - полином, а число основных итераций этапа работы с ребром $u\in U$ - не более $\frac{1}{2}\mu_\ell(u)<\ell[V]$. Учитывая процедуру нахождения начального мультиразреза $Q^{нач}$, излагаемую в 6.11 (эта процедура требует полиномиального от $|V|$ числа действий), и процедуру сведения задачи с $H\in\mathfrak{X}^2$ к задаче с $H'\subset K_4$ из 6.8, мы получаем следующую теорему.

<u>Теорема 6.1</u>. Пусть $V\supseteq T$, ℓ - квазичетная функция на $[V]$ и $H=(T,U)\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$. Тогда алгоритм $ALOCK$ находит целочисленное решение задачи $LOCK(V,U,\ell)$. Оценка числа действий алгоритма - $O(P(|V|)\ell[V])$, где $P(n)$ - некоторый полином.

Таким образом, утверждение (б) теоремы 5.1 доказано, Кроме того, алгоритм $ALOCK$ дает доказательство импликации $(ii)\to(i)$ в теореме 5.1 для класса квазичетных сетей, откуда можно стандартным образом получить доказательство $(ii)\to(i)$ при $\ell\in R_+^{[V]}$ (другое, неконструктивное, доказательство было изложено в разделе 5.4).

6.11. Задача $LOCK(V,U,\ell)$ с целочисленной функцией ℓ и $H\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, вообще говоря, может не иметь целочисленного решения (например, при $|V|=|T|=4$, $\ell\equiv 1$ и $H=K_4$).

В соответствии со сказанным выше, для доказательства существования целочисленного решения в случае квазичетной функции ℓ там требуется показать, что существует такой мультиразрез $Q^{нач}$, что $\ell-\lambda^{Q^{нач}}\in 2Z_+^{[V]}$. Докажем вначале следующую лемму.

<u>Лемма 6.17</u>. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) функция $\ell \in \mathbb{Z}_+^{[V]}$ – квазичетная и $\ell \notin 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$;

(ii) существует собственное подмножество $X \subset V$ такое, что $\ell(e)$ – нечетно тогда и только тогда, когда $e \in [X, \bar{X}]$.

<u>Доказательство.</u> $(ii) \to (i)$ следует из того, что величина $|E_C \cap [X, \bar{X}]|$ – четная для любого цикла C на V. Докажем $(i) \to (ii)$. Выберем произвольную вершину $x \in V$, и пусть $X = \{x\} \cup \{y \in V \setminus \{x\} : \ell(xy)$ – четно$\}$. Поскольку $\ell(yz)$ – нечетно для некоторого $(yz) \in [V]$, то $X \neq V$ (иначе цикл $(xyzx)$ имел бы нечетную длину, вопреки квазичетности ℓ). Рассматривая цикл $(xy'z'x)$ для каждого из случаев $(y'z') \in [X \setminus \{x\}]$, $(y'z') \in [\bar{X}]$, $(y'z') \in [X \setminus \{x\}, \bar{X}]$, мы получаем требуемое утверждение □

Рассмотрим теперь произвольную сеть (V, T, ℓ) с квазичетной функцией ℓ. Если $\ell \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$, то полагаем $Q^{нач} = \emptyset$. Пусть $\ell \notin 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$. Если $\mu_\ell(u) = 0$ для всех $u \in U$, то $Q = \emptyset$ является решением задачи $LOCK(V, U, \ell)$. Пусть $\mu_\ell(u) > 0$ для некоторого $u \in U$, и пусть X – подмножество, определенное в лемме 6.17. Если $X \cap T \neq \emptyset \neq \bar{X} \cap T$, то полагаем $Q^{нач} = \{X\}$, тогда, очевидно, $\ell - \lambda^{Q^{нач}} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$. Предположим, для определенности, что $X \cap T = \emptyset$, и пусть X' – произвольное подмножество в V, такое, что $X' \cap T \neq \emptyset \neq \bar{X}' \cap T$ и $\ell(e) > 0$ для всех $e \in [X', \bar{X}']$ (такое подмножество существует, поскольку $\mu_\ell(U \neq 0)$). Положим $Q^{нач} = \{X' \setminus X, X \setminus X'\}$. Легко проверить, что $\ell - \lambda^{Q^{нач}} \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$ (используя тот факт, что $X = (X' \cup X) \setminus (X' \setminus X)$ и $\ell - \rho_X^V \in 2\mathbb{Z}_+^{[V]}$).

7. КЛАСС ОКЦ ДЛЯ МУЛЬТИРАЗРЕЗНЫХ ЗАДАЧ О СУЩЕСТВОВАНИИ

Следующая теорема дает полное описание разрезных схем CS (и массовых задач $EX(CS)$), принадлежащих EX-ОКЦ-классу (определение было дано в разделе 3.3).

<u>Теорема 7.1</u>. (а) Пусть $CS \subseteq \,]T[$ – 3-незацепленное множество, $V \supseteq T$, $\ell \in \mathbb{R}_+^{[V]}$, $d \in \mathbb{R}_+^{CS}$, и пусть неравенство (3.14) выполнено для всех $u \in [T]$. Тогда задача $EX(V, CS, \ell, d)$ имеет решение.

(б) Пусть $CS \subseteq \,]T[$ – 3-зацепленное множество, $V \supset T$ и $|V| \geq |T| + 2$. Тогда существуют такие $\ell \in \mathbb{R}_+^{[V]}$ и $d \in \mathbb{R}_+^{CS}$, что неравенство (3.14) выполнено для всех $u \in [T]$, но задача $EX(V, CS, \ell, d)$ не имеет решения.

(в) Пусть $CS \subseteq \,]T[$ – 3-незацепленное множество, $V \supseteq T$, $\ell \in \mathbb{Z}_+^{[V]}$, $d \in \mathbb{Z}_+^{CS}$, и пусть (3.14) справедливо для всех $u \in [T]$. Пусть, далее, функция $\tilde{\ell} \in \mathbb{Z}_+^{[V]}$ определена как $\tilde{\ell}(e) = \Sigma(d_A : A \in CS, e \in [A, T \setminus A])$ для $e \in [T]$ и $\tilde{\ell}(e) = \ell(e)$ для $e \in [V] \setminus [T]$. Тогда, если функция $\tilde{\ell}$ – квазичетная, то задача $EX(V, CS, \ell, d)$ имеет целочисленное решение.

Определение i-зацепленного множество было дано в разделе 2.6, а определение квазичетной функции – в 5.1). Таким образом, EX-ОКЦ-класс состоит из 3-незацепленных схем $CS \subseteq \,]T[$ (для любых T) и только из них.

7.1. <u>Доказательство утверждения (а)</u>. Воспользуемся одной теоремой о многопродуктовых потоках, полученной в работах [3, 18]. Согласно этой теореме, для произвольного 3-незацепленного множества $CS \subseteq \,]T[$ и произвольной функции $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$ $(V \supseteq T)$ существует такая допустимая функция $\varphi : \mathcal{L}^{V,T} \to \mathbb{R}_+$ (т.е. удовлетворяющая условию упаковки (2.8)), что

$$\nu_A^w = \Sigma(\varphi_L : L \in \mathcal{L}^{V,T}, u_L \in [A, T \setminus A]) \qquad \forall A \in CS \qquad (7.1)$$

(где $\nu_A^w \overset{def}{=} \min\{w[X, \bar{X}] : X \subset V, X \cap T = A\}$ и $\mathcal{L}^{V,T}$ – множество цепей на V с обоими концами в T). Задача, состоящая в нахождении указанной функции φ была названа в [3, 18] задачей о запирающем мультипотоке, обозначим ее через $LOCK^f(V, CS, w)$.

Пусть теперь $\ell \in \mathbb{R}_+^{[V]}$ и $d \in \mathbb{R}_+^{CS}$ удовлетворяют (3.14) для всех $u \in [T]$. Надо показать, что для любой функции $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$ выполняется неравенство (3.12) (тогда, согласно следствию 3.1, задача $EX(V, CS, w, d)$ имеет решение). Пусть φ – решение задачи $LOCK^f(V, CS, w)$ для фиксированного $w \in \mathbb{R}_+^{[V]}$. Тогда, учитывая (2.8) и (7.1),

$$\ell \cdot w - d \cdot (\nu^w|_{CS}) \geq \ell \cdot \Sigma(\varphi_L \theta_L : L \in \mathcal{L}^{V,T}) - \sum_{A \in CS} d_A \Sigma(\varphi_L : L \in \mathcal{L}^{V,T}, u_L \in [A, T \setminus A]) =$$
$$= \sum_{L \in \mathcal{L}^{V,T}} \varphi_L (\ell_L - \Sigma(d_A : A \in CS, u_L \in [A, T \setminus A])),$$

и теперь неравенство (3.12) следует из (3.14) (поскольку $\varphi_L \geq 0$ и $\ell_L \geq \mu_\ell(u_L)$).

7.2. <u>Доказательство утверждения (б)</u>. Пусть множество CS – 3-зацепленное, $V \supset T$ и $|V| \geq |T| + 2$. Выберем произвольную тройку $\{A_1, A_2, A_3\}$ попарно трансверсальных подмножеств в CS. Положим $d_{A_i} = 1$, $i = 1, 2, 3$, и $d_A = 0$ – для остальных элементов A в CS. Теперь наша задача – определить функцию ℓ так, чтобы выполнялось (3.I4) (при данном d), и задача $EX(V,CS,\ell,d)$ была бы неразрешимой. Нам потребуется следующее несложное утверждение (см. [3]): существует такое подмножество $T' \subseteq T$, что выполняется по крайней мере одно из двух: (а) $|T'|=4$ (пусть, для определенности, $T'=\{0,1,2,3\}$) и для каждого $i=1,2,3$ множество $\{0,i\}$ совпадает либо с $A_i \cap T'$, либо с $(T \setminus A_i) \cap T'$ (см. рис. 7.Iа), (б) $|T'|=6$ (пусть, для определенности, $T'=\{0,\ldots,5\}$) и для каждого $i=1,2,3$ множество $\{i,i+1,i+2\}$ совпадает либо с $A_i \cap T'$, либо с $(T \setminus A_i) \cap T'$ (см. рис. 7.Iб).

Пусть T' - указанное подмножество. Определим ℓ следующим образом.

1) $|T'|=4$. Выделим произвольную вершину $x \in V \setminus T$, и пусть $G_1=(T' \cup \{x\}, E_1)$ - подграф графа $(V,[V])$, изображенный на рис. 4.I Положим $\ell(e)=1$ для $e \in E_1$ и $\ell(e) \geq 2$ для $e \in [V] \setminus E_1$.

2) $|T'|=6$. Выделим произвольные вершины $x,y \in V \setminus T$, и пусть $G_2=(T' \cup \{x,y\}, E_2)$- подграф графа $(V,[V])$, изображенный на рис. 4. Положим $\ell(e)=1$ для $e \in E_2$ и $\ell(e) \geq 3$ для $e \in [V] \setminus E_2$.

Легко проверить, что в обоих случаях неравенство (3.I4) выполнено для всех $u \in [T]$. В то же время задача $EX(V,CS,\ell,d)$ не имеет решения. Действительно, пусть $w=w_{G_1}$ (соответственно, $w=w_{G_2}$). Легко видеть, что $\nu^w_{A_i}=2$ - в первом случае, и $\nu^w_{A_i}=3$ - во втором случае. В первом случае мы получаем $\ell \cdot w=4<6=\sum(d_A \nu^w_A : A \in CS)$, а во втором случае - $\ell \cdot w=7<9=\sum(d_A \nu^w_A : A \in CS)$, т.е. для данных ℓ,d и w неравенство (3.I2) - нарушено, и, согласно следствию 3.I, задача $EX(V,CS,\ell,d)$ не имеет решения.

7.3. Доказательство утверждения (в) теоремы 7.I следует из описываемого ниже *greedy*-алгоритма AEX, который для произвольных 3-незацепленного множества $CS \subseteq]T[$, множества $V \supseteq T$ и таких $\ell \in R_+^{[V]}$ и $d \in R_+^{CS}$, что выполняется (3.I4) (для всех $u \in [T]$), находит решение задачи $EX(V,CS,\ell,d)$, причем, если функция $\tilde{\ell}$ - квазичетная, то найденное решение оказывается целочисленным.

<u>Алгоритм AEX.</u> Все итерации алгоритма устроены одинаковым образом, поэтому нам достаточно будет описать только первую итерацию.

Положим $CS^+=\{A \in CS : d_A>0\}$. Выберем произвольное минимальное по включению множество A^* среди всех $A \in CS^+$ и их дополнений $T \setminus A$. Без потери общности можно считать, что $A^* \in CS^+$. Определим множество X и число a как

$$X = A^* \cup \{x \in V \setminus A^* : \min\{\mu_{\tilde{\ell}}[sx] : s \in A^*\}=0\}$$
$$\cup \{x \in V \setminus A^* : \min\{\mu_{\tilde{\ell}}[sx]+\mu_{\tilde{\ell}}[xt]-\mu_{\tilde{\ell}}[st] : [st] \in [A^*]\}=0\};$$
$$a = \min\{d_{A^*}, \min\{\tilde{\ell}(e) : e \in [X,\bar{X}]\},$$
$$\tfrac{1}{2}\min\{\mu_{\tilde{\ell}}[sx]+\mu_{\tilde{\ell}}[xt]-\mu_{\tilde{\ell}}[st] : x \in \bar{X}, [st] \in [A^*]\}\}.$$

Положим $\alpha_X=a$, $\ell'=\ell-a\rho^V_X$, $d'_{A^*}=d_{A^*}-a$, $d'_B=d_B$ $(B \in CS \setminus \{A^*\})$.

Следующая итерация применяется к функциям ℓ',d' и к множеству $\{A \in CS : d'_A>0\}$, т.е. фактически рассматривается задача $EX(V,CS,\ell',d')$. При этом соблюдается следующее правило: если на рассмотренной итерации было $d_{A^*}>a$, то следующая итерация проводится относительно того же самого A^*.

В результате алгоритма будет определен мультиразрез α , являющийся решением задачи $EX(V,CS,\ell,d)$ (на множествах $Y \in]V,CS[$, не встретившихся на итерациях алгоритма, полагается $\alpha_Y=0$).

Для обоснования алгоритма достаточно доказать следующее:

(а) $X \cap T=A^*$;

(б) если функция $\tilde{\ell}$ - квазичетная, то величина a - целая и, следовательно, функция $\tilde{\ell}'$ - также квазичетная (где $\tilde{\ell}'$ определяется для ℓ' и d' аналогично $\tilde{\ell}$),

(в) ℓ' и d' удовлетворяют (3.I4) для всех $u \in [T]$.

Доказательство (а) и (б) получается сравнительно просто. Более сложным является доказательство утверждения (в). Строгое обоснование алгоритма AEX - это предмет отдельной работы.

Оценим трудоемкость алгоритма AEX .. Нетрудно видеть, что, если на рассматриваемой итерации оказывается $a<d_{A^*}$, то для множества X' , определяемого на следующей итерации, справедливо $X' \supset X$. Таким образом, число итераций для каждого $A \in CS$ не превышает $|V|-|T|+1$, а общее число итераций алгоритма - меньше, чем $|CS||V|$. Далее, можно считать, что перед началом алгоритма вычислены значения $\sum(d_A : A \in CS, u \in [A,T \setminus A])$ для всех $u \in [T]$ (что требует $O(|CS||T|^2)$ действий), т.е. вычислена начальная функция $\tilde{\ell}$. В дальнейшем $\tilde{\ell}$ пересчитывается по формуле $\tilde{\ell}:=\tilde{\ell}-a\rho^V_X$ (для текущих X и a). Тогда для нахождения текущих X и a требует-

ся $O(|T||V|^2)$ действий, если для определения чисел $\{\mu_\ell(s{\times}x)$: $s\in A^*,\ x\in X\}$ используется алгоритм трудоемкости $O(|V|^2)$, например, алгоритм Дийкстры. Наконец, нетрудно показать (см. [3]), что для 3-нетрансверсального множества CS справедливо $|CS|\leq C|T|^2$, где C – некоторая константа. Таким образом, общее число действий алгоритма – $O(|T|^3|V|^3)$.

7.4. Теорема 7.I и алгоритм AEX имеют ряд приложений. Укажем одно из них. В разделе 6 был изложен алгоритм $ALOCK$, решающий произвольную задачу $LOCK(V,U,\ell)$ для $H=(T,U)\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$ и квазичисленной функции ℓ и имеющий оценку трудоемкости $O(P(|V|)\ell[V])$, где $P(n)$ – некоторый полином. Алгоритм AEX позволяет построить менее громоздкий алгоритм решения указанной задачи $LOCK(V,U,\ell)$ для произвольной $\ell\in R_+^{[V]}$, причем, если сеть (V,T,ℓ) – квазичетная, то полученное решение будет целочисленным. Изложим идею этого алгоритма (его полное описание и обоснование мы здесь не приводим).

В соответствии со сказанным в разделе 6.8 достаточно ограничиться случаем $H\in\{K_4,C_5\}$. Вначале рассматривается редуцированная задача $LOCK(T,U,\mu)$, где $\mu=\mu_\ell|[T]$. Показывается, что эта задача имеет такое решение α (отыскиваемое процедурой трудоемкости $O(1)$), что: (а) множество $CS^+=\{A\in]T[:\ \tilde{\alpha}_A>0\}$ – 3-незацепленное, (б) если функция ℓ – квазичетная, то функция $\tilde{\alpha}$ – целочисленная. Далее решается задача $EX(V,CS^+,\ell,\tilde{\alpha}^+)$, где $\tilde{\alpha}^+_A=\tilde{\alpha}_A$, $A\in CS^+$. Поскольку множество CS^+ – 3-незацепленное и поскольку, ввиду допустимости $\tilde{\alpha}$, неравенство (3.I4) выполнено (при $d=\tilde{\alpha}^+$) для всех $u\in[T]$, эта задача имеет решение некоторое α' (которое можно построить при помощи алгоритма AEX). Тогда $\alpha\in R_+^{]V[}$, определенное как $\alpha_X=\alpha'_X$ $(X\in]V,CS^+[)$ и $\alpha_X=0$ – для остальных X в $]V[$, является решение задачи $LOCK(V,U,\ell)$. Действительно, $\lambda^\alpha\leq\ell$ и

$$\varkappa^\alpha(u)=\Sigma(\Sigma(\alpha_X: X\subset V, X\cap T=A): A\in CS^+,\ u\in[A,T\setminus A])=$$
$$=\Sigma(\tilde{\alpha}_A: A\in CS^+,\ u\in[A,T\setminus A])=\mu_\ell(u)$$

для всех $u\in U$. Нетрудно показать также, что, если функция ℓ – квазичетная, то функция $\tilde{\ell}$ – также квазичетная, следовательно, в этом случае мы получаем целочисленное решение α.

Таким образом, имеется алгоритм решения произвольной задачи $LOCK(V,U,\ell)$, $H=(T,U)\in\{K_4,C_5\}\cup\mathfrak{X}^2$, трудоемкость которого та же самая (по порядку), что и трудоемкость алгоритма AEX.

С учетом сведения $H\in\mathfrak{X}^2$ к K_4, эта трудоемкость – $O(|V|^3)$. Отсюда, в частности, следует, что имеется алгоритм решения двухпродуктовой задачи на max-Σ $\Sigma(V,CS_2,\ell)$, трудоемкость которого – $O(|V|^3)$ (см. раздел 5.2).

8. КЛАСС ОКЦ ДЛЯ ЗАДАЧ НА MAX-Σ И ЗАДАЧ О МАКСИМАЛЬНОМ МУЛЬТИРАЗРЕЗЕ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

8.I. Определение. Множество $CS\subseteq]T[$ назовем 3-полным, если для любых трех попарно трансверсальных подмножеств $A_1, A_2, A_3\in CS$ (если таковые имеются) существуют $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in R_+$ и $\varepsilon\in R_+^{CS}$ (зависящие от A_1,A_2,A_3), для которых справедливо

$$\gamma_1\rho^T_{A_1}+\gamma_2\rho^T_{A_2}+\gamma_3\rho^T_{A_3}>\Sigma(\varepsilon_B\rho^T_B: B\in CS), \qquad (8.I)$$
$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3\leq\Sigma(\varepsilon_B: B\in CS) \qquad (8.2)$$

(векторное неравенство (8.I) означает, что соответствующее неравенство является строгим по крайней мере для одной координаты $u\in[T]$).

Нетрудно видеть, что разрезные схемы CS_1 и CS_2 из примеров раздела 2.2 являются 3-полными, а 3-зацепленная схема $CS_3=\{\{0,i\}: i=1,2,3\}\subset]T_4[$, $T_4=\{0,1,2,3\}$, – не 3-полная. Приведем другие примеры 3-полных множеств (проверку оставляем читателю).

Пример I. $CS=]T[$ для произвольного T.

Пример 2. $CS=\{A\subset T: |A|\leq k\}$ для произвольных T и $k\geq 1$.

Пример 3. $CS=\{A\subset T: |A|$ – нечетное$\}$ для произвольного T, состоящего из четного числа элементов.

Пример 4. $CS=\{A\subset T: |[A,T\setminus A]\cap U|=1\}$ для произвольных T и $U\subseteq[T]$.

Пример 5. $CS=\{A\subset T: a[A,T\setminus A]$ – нечетное$\}$ для произвольных T и $a\in\mathbb{Z}^{[T]}$ (где $a[A,T\setminus A]=\Sigma(a(u): u\in[A,T\setminus A])$).

Множества разрезов, отвечающие указанным разрезным схемам, возникают в р е задач комбинаторной оптимизации. Например, множество разрезов $\{(X,\bar{X}): X\in]V,CS[,\ V\supseteq T\}$ для CS из примера 3 исследовалось в работах [24,25]. Соответствующее множество разрезов для CS из примера 4 встречалось в [22] (см. задачу S из 2.5).

Для пояснения определения 3-полного множества рассмотрим два конкретных примера таких множеств.

<u>Пример 6</u>. $T=\{0,\dots,5\}$ и CS состоит из шести подмножеств $A_i=\{i,i+1,i+2\}$ $(i=1,2,3)$, $A_4=\{1\}$, $A_5=\{3\}$, $A_6=\{5\}$, см. рис. 8.Iа. В CS имеется единственная тройка попарно трансверсальных элементов, а именно $\{A_1,A_2,A_3\}$. Легко проверить, что (8.I) и (8.2) выполняются при $\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=1$, $\varepsilon_{A_i}=0$ $(i=1,2,3)$, $\varepsilon_{A_j}=1$ $(j=4,5,6)$.

<u>Пример 7</u>. $T=\{0,\dots,7\}$ и CS состоит из восьми подмножеств, изображенных на рис. 8.Iб (они рассматриваются с точностью до дополнения). Пусть, для определенности, $A_1=\{0,1,4,5\}$, $A_2=\{1,2,5,6\}$, $A_3=\{0,1,2,3\}$. Можно убедиться, что $\{A_1,A_2,A_3\}$ – единственная тройка попарно трансверсальных элементов в CS, и (8.I) – (8.2) выполняются при $\gamma_1=\gamma_2=2$, $\gamma_3=1$, $\varepsilon_{A_i}=0$ $(i=1,2,3)$, $\varepsilon_{A_j}=1$ $(j=4,\dots,8)$.

<u>Теорема 8.I.</u> (а) Пусть $CS\subseteq]T[$ – 3-полное множество. Тогда (3.I7) обращается в равенство для любой сети $N=(V,T,\ell)$ (т.е. для любых $V\supseteq T$ и $\ell\in\mathbb{R}_+^{[V]}$). (б) Пусть множество $CS\subseteq]T[$ – не 3-полное, $V\supseteq T$ и $|V|\geq|T|+2$. Тогда существует функция $\ell\in\mathbb{R}_+^{[V]}$, для которой неравенство (3.I7) – строгое.

Таким образом, Σ-ОКЦ-класс состоит из 3-полных схем CS и только из них.

Доказательство утверждения (б) теоремы 8.I – достаточно сложное, и мы его здесь не приводим. Эскиз доказательства более простого утверждения (а) – следующий.

Пусть $CS\subseteq]T[$ – 3-полное множество, и $N=(V,T,\ell)$ – произвольная сеть. Рассмотрим редуцированную сеть $N_T=(T,T,\mu)$, где $\mu=\mu_\ell|_{[T]}$, и пусть $\zeta\in\mathbb{R}_+^{CS}$ – оптимальное решение задачи $\Sigma(T,CS,\mu)$, причем такое, что величина $\omega(\zeta)=\Sigma(\lambda^{\zeta}(u): u\in[T])$ – минимальная. Тогда множество $CS^+=\{A\in CS:\zeta_A>0\}$ – 3-незацепленное. Действительно, если бы имелась тройка $\{A_1,A_2,A_3\}$ попарно трансверсальных элементов в CS^+, то для мультиразреза ζ', определенного как $\zeta'_{A_i}=\zeta_{A_i}-b\gamma_i+b\varepsilon_{A_i}$ $(i=1,2,3)$, $\zeta'_B=\zeta_B+b\varepsilon_B$ $(B\in CS\setminus\{A_1,A_2,A_3\})$, где $a=\min\{\zeta_{A_i}: i=1,2,3\}$, $b=a/\max\{\gamma_i\}$ и γ,ε удовлетворяют (8.I)–(8.2), мы имели бы $\|\zeta'\|\geq\|\zeta\|$ и $\omega(\zeta')<\omega(\zeta)$, вопреки выбору ζ. Пусть теперь $\alpha':]V,CS^+[\to\mathbb{R}_+$ – решение задачи $EX(V,CS^+,\ell,\zeta^+)$, где $\zeta^+_A=\zeta_A$, $A\in CS^+$, (эта задача разрешима в силу теоремы 7.I, поскольку множество CS^+ – 3-незацепленное и неравенства (3.I4) (при $d_A=\zeta_A$) следуют из допустимости α в сети (T,T,μ)).

Тогда для $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, определенного как $\alpha_X=\alpha'_X$ $(X\in]V,CS^+[)$ и $\alpha_X=0$ – для остальных X в $]V,CS[$, мы имеем $\|\alpha\|=\|\zeta\|=\Sigma^{N_T,CS}$, $\lambda^\alpha\leq\ell$. Согласно следствию 3.3, примененному к задаче $\Sigma(T,CS,\mu)$, справедливо $\Sigma^{N_T,CS}=\min\{\Sigma(\beta(u)\mu_\ell(u): u\in[T])\}$, где минимум взят по всем $\beta\in\mathbb{R}_+^{[T]}$, удовлетворяющим (3.I6). Отсюда следует $\|\alpha\|=\min\{\Sigma(\beta(u)\mu_\ell(u): u\in[T])\}$, т.е. (3.I7) выполняется как равенство.

8.2. <u>Определение.</u> Множество $CS\subseteq]T[$ назовем <u>2-полным</u>, если для любых двух трансверсальных элементов $A_1,A_2\in CS$ (если таковые имеются) найдутся такие $B_1,B_2\in CS$, что $B_1^*=A_1^*\setminus A_2^*$ и $B_2^*=A_2^*\setminus A_1^*$ для некоторых $A_i^*\in\{A_i,T\setminus A_i\}$, $B_i^*\in\{B_i,T\setminus B_i\}$, $i=1,2$.

Нетрудно показать, что схемы CS из примеров I–5 являются 2-полными, а схемы CS из примеров 6,7 – не 2-полные. Легко убедиться в справедливости следующего предложения.

<u>Предложение 8.I</u>. Если множество CS – 2-полное, то оно является также 3-полным.

(Указание: если $A_1,A_2,A_3\in CS$ – три попарно трансверсальных элемента, и B_1,B_2 – элементы в CS, указанные в определении 2-полного множества (для A_1,A_2), то (8.I) и (8.2) выполняются при $\gamma_1=\gamma_2=\varepsilon_{B_1}=\varepsilon_{B_2}=1$, $\gamma_3=0$ и $\varepsilon_B=0$ – для остальных B в CS).

Из теоремы 8.I и предложения 8.I следует, что всякая 2-полная схема принадлежит Σ-ОКЦ-классу. В то же время 2-полные множества обладают рядом дополнительных свойств. Укажем наиболее интересное из них.

<u>Лемма 8.I</u>. Для 2-полного множества $CS\subseteq]T[$ задача на max-Σ $\Sigma(V,CS,\ell)$ имеет такое оптимальное решение $\alpha:]V,CS[\to\mathbb{R}_+$, что множество $\mathcal{D}^+(\alpha)=\{X\in]V,CS[:\alpha_X>0\}$ – параллельное. Если при этом $\ell\in\mathbb{Z}_+^{[V]}$ и редуцированная задача $\Sigma(T,CS,\mu)$ $(\mu=\mu_\ell|_{[T]})$ имеет целочисленное оптимальное решение, то задача $\Sigma(V,CS,\ell)$ имеет целочисленное оптимальное решение α с параллельным $\mathcal{D}^+(\alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть ζ – оптимальное решение для $\Sigma(T,CS,\mu)$ и $CS^+(\zeta)=\{A\in CS:\zeta_A>0\}$. Можно считать, что множество $CS^+(\zeta)$ – параллельное. Действительно, если A_1,A_2 – трансверсальные элементы в $CS^+(\zeta)$, то, произведя преобразо-

вание $\tau_{A_i} := \tau_{A_i} - a$, $\tau_{B_i} := \tau_{B_i} + a$, $i=1,2$, (где $a = \min\{\tau_{A_1}, \tau_{A_2}\}$ и B_1, B_2 – множества, указанные в определении 2-полного множества), мы получим новое оптимальное решение с меньшей функцией λ^{τ}. Заметим, что такое преобразование сохраняет целочисленность τ.

Лемма будет доказана, если мы установим, что для любого мультиразреза $\tau \in R_+^{CS}$, для которого $\lambda^{\tau} \le \mu_{\ell}|[T]$ и $CS^+(\tau)$ – параллельное множество, существует мультиразрез $\alpha :]V,CS[\to R_+$ (целочисленный, если $\ell \in Z_+^{[V]}$ и $\tau \in Z_+^{CS}$), такой, что $\lambda^{\alpha} \le \ell$ и $\delta_A^{\alpha} = \tau_A$ для всех $A \in CS$ и множество $\mathcal{D}^+(\alpha)$ – параллельное. Применим индукцию по параметру $\eta(\ell,\tau) = |CS^+(\tau)| + |\{e \in [V] : \ell(e) > 0\}|$ (для фиксированных V, T, CS и произвольных ℓ и τ). Случай $CS^+(\tau) = \emptyset$ – тривиален. Пусть $CS^+(\tau) \ne \emptyset$. Выберем произвольное минимальное по включению множество A^* среди всех $A \in CS^+(\tau)$ и их дополнений $T \setminus A$. Без потери общности можно считать, что $A^* \in CS^+(\tau)$. Положим

$$X = A^* \cup \{x \in V \setminus A^* : \min\{\ell[sx] : s \in A^*\} = 0\},$$

$$\Delta = \min\{\tau_{A^*}, \min\{\ell[xy] : x \in X, y \in \bar{X}\}\}.$$

Поскольку $\ell[st] \ge \mu_{\ell}[st] \ge \lambda^{\tau}[st] \ge \tau_{A^*} > 0$ для любых $s \in A^*$ и $t \in T \setminus A^*$, то $X \cap T = A^*$. Положим $\ell' = \ell - \Delta\rho_X^V$, $\tau'_{A^*} = \tau_{A^*} - \Delta$, $\tau'_B = \tau_B$. Надо доказать, что для любого $[pq] \in [T]$ справедливо

$$\lambda^{\tau'}[pq] \le \mu_{\ell'}[pq]. \tag{8.3}$$

Тогда, по индукции (ввиду $\eta(\ell',\tau') < \eta(\ell,\tau)$), существует требуемый мультиразрез $\alpha' :]V,CS[\to R_+$ (относительно ℓ' и τ'), и теперь мультиразрез α для ℓ и τ определяется как $\alpha_X = \alpha'_X + \Delta$, $\alpha_Y = \alpha'_Y$ ($Y \in]V,CS[\setminus \{X\}$)(параллельность $\mathcal{D}^+(\alpha)$ следует из выбора A^* и X). Докажем (8.3).

1) $p,q \in A^*$. Из выбора A^* следует $\lambda^{\tau'}[pq] = 0$, и (8.3) – очевидно.

2) $p,q \in T \setminus A^*$. Пусть $L = [p = x_0 x_1 \ldots x_k = q]$ – цепь на V, для которой $\ell'_L = \mu_{\ell'}[pq]$. Если $E_L \cap [X,\bar{X}] = \emptyset$, то $\ell'_L = \ell_L$, и (8.3) следует из $\lambda^{\tau'}[pq] = \lambda^{\tau}[pq] \le \ell_L$. Пусть $E_L \cap [X,\bar{X}] \ne \emptyset$, и пусть $x_{i(0)}, x_{i(1)}, \ldots, x_{i(m)}$ – такая последовательность, что $0 = i(0) < i(1) < \ldots < i(m) = k$, $m = |E_L \cap [X,\bar{X}]|$ и $x_{i(j)}$ принадлежит X тогда и только тогда, когда j – нечетно. Согласно определению X, для каждого нечетного j найдется полюс $s_j \in A^*$, такой, что $\ell[s_j x_{i(j)}] = 0$. Кроме того, из выбора Δ и A^* следует $\mu_{\ell}[xy] \ge \Delta$ для любых $x \in X, y \in \bar{X}$ и $\lambda^{\tau}[ps_1] + \lambda^{\tau}[s_{m-1}q] - \lambda^{\tau}[pq] \ge 2\tau_{A^*} \ge 2\Delta$. Тогда

$$\mu_{\ell'}[pq] = \ell'_L = \ell_L - m\Delta \ge \sum_{i=0}^{m-1} \mu_{\ell}[x_{i(j)} x_{i(j+1)}] - m\Delta \ge \mu_{\ell}[ps_1] + \mu[s_{m-1}q] - 2\Delta \ge \lambda^{\tau}[ps_1] + \lambda^{\tau}[s_{m-1}q] - 2\Delta \ge \lambda^{\tau}[pq] = \lambda^{\tau'}[pq].$$

3) $p \in T \setminus A^*$, $q \in A^*$. В этом случае доказательство проводится аналогично доказательству для предыдущего случая (надо учесть, что $m = |E_L \cap [X,\bar{X}]|$ – нечетно, и $\lambda^{\tau'}[pq] = \lambda^{\alpha}[pq] - \Delta$) □

Замечание 8.I. Данное доказательство фактически содержит алгоритм решения задачи $\Sigma(V,CS,\ell)$ в том случае, если имеется некоторое оптимальное решение τ "предзадачи" $\Sigma(T,CS,\mu)$. На первом этапе алгоритма осуществляются преобразования τ, приводящие к параллельному множеству $CS^+(\tau)$. Процесс преобразований может быть организован таким образом, чтобы общее число преобразований не превосходило $O(|T|^2|CS^+(\tau)|)$ для начального τ (организацию такого процесса мы здесь не описываем). На втором этапе алгоритма полученное "предрешение" τ последовательно перестраивается в оптимальное решение задачи $\Sigma(V, CS,\ell)$. Для этого с каждым выбранным A^* итерации проводятся до тех пор, пока не станет $\tau_{A^*} = 0$, при этом, как легко видеть, текущее множество X расширяется от итерации к итерации. Следовательно, общее число итераций этапа не превосходит $|CS^+(\tau)|(|V|-|T|+1)$, и, поскольку число элементов параллельного множества $CS^+(\tau)$ оценивается как $O(|T|)$, то число итераций этапа – $O(|T||V|)$, а оценка трудоемкости этапа – $O(|T||V|^3)$.

Замечание 8.2. Пусть $CS \subseteq]T[$ – 3-полное множество. Доказательство утверждения (а) теоремы 8.I показывает, что решение задачи $\Sigma(V,CS,\ell)$ сводится к нахождению оптимального решения τ "предзадачи" $\Sigma(T,CS,\mu)$ с 3-незацепленным множеством $CS^+(\tau)$ и последующего решения задачи $EX(V,CS^+,\ell,\tau^+)$ при помощи алгоритма AEX, описанного в 7.3. Если при этом $\tau \in Z_+^{CS}$ и функция $\tilde{\ell}$ – квазичетная (где $\tilde{\ell}$ определено в соответствии с теоремой 7.I для $d = \tau^+$), то AEX построит целочисленное оптимальное решение задачи $\Sigma(V,T,\ell)$.

Таким образом, для получения решения задачи $\Sigma(V,CS,\ell)$ с 3-полной схемой CS достаточно "всего лишь" суметь решить ее "предзадачу" $\Sigma(T,CS,\mu)$, причем гарантированная дробность решения второй – вдвое меньше, чем дробность решения исходной, и – та же самая, если схема CS – 2-полная. В следующем разделе мы покажем, что для целочисленной сети и 2-полной схемы дробность "предрешения" может быть как угодно большой. Этот факт - довольно неожиданный, поскольку, как указывалось выше, дробность решения мультиразрезных задач $EX(V,CS,\ell,d)$, $LOCK(V,U,\ell)$ и мультипотоковых задач $EX^f(V,U,w,d)$, $\Sigma^f(V,U,w)$, $LOCK^f(V,CS,w)$ для целочисленных ℓ,d,w и "хороших" схем CS и $H=(T,U)$ - ограниченная. Отметим также, что для последних пяти задач имеются "хорошие" комбинаторные алгоритмы решения, в то время, как для задачи $\Sigma(V,CS,\ell)$ такой алгоритм неизвестен.

8.3. Рассмотрим задачу на max-Σ $\Sigma(V,CS_U,\ell)$ со схемой $CS_U = \{A\subset T: |[A,T\setminus A]\cap U|=1\}$ из примера 4 в 8.I. Для произвольного цикла C на V положим

$$\Delta(\ell,C) = \Sigma(\ell(e): e\in E_C\setminus U)-\Sigma(\ell(e): e\in E_C\cap U).$$

Пусть $\alpha:]V,CS[\to R_+$ - оптимальное решение задачи $\Sigma(V, CS_U,\ell)$. Легко видеть, что

$$\Sigma^{N,CS_U} = \|\alpha\| = \Sigma(\lambda^\alpha(u): u\in U) \leq \Sigma(\ell(u): u\in U) = \ell(U)$$

(где $N=(V,T,\ell)$) и равенство

$$\Sigma^{N,CS_U} = \ell(U) \qquad (8.4)$$

справедливо тогда и только тогда, когда $\lambda^\alpha(u)=\ell(u)$ для всех $u\in U$. Задача $\Sigma(V,CS_U,\ell)$ обобщает задачу S из раздела 2.5 (если (8.4) нарушено, то задача S не имеет решения, а если (8.4) выполнено, то оптимальное решение α задачи $\Sigma(V, CS_U,\ell)$ является решением задачи S). Согласно теореме Сеймура (теорема 2.I из 2.5) равенство (8.4) выполняется в том и только том случае, когда $\Delta(\ell,C)\geq 0$ для любого цикла C на V. Докажем сначала следующую теорему.

<u>Теорема 8.2.</u> Пусть $\ell\in \mathbb{Z}_+^{[V]}$ и величина $\Delta(\ell,C)$ - неотрицательная и четная для любого цикла C на V. Тогда задача $\Sigma(V,CS_U,\ell)$ имеет целочисленное оптимальное решение (являющееся также решением задачи S).

<u>Доказательство.</u> Из неотрицательности всех $\Delta(\ell,C)$ следует, что $\mu_\ell(u)=\ell(u)$ для всех $u\in U$. Поскольку схема CS_U - 2-полная, то, учитывая лемму 2.I, достаточно доказать существование целочисленного оптимального решения "предзадачи" $\Sigma(T,CS_U,\mu)$. Легко видеть, что величина $\Delta(\mu,C)$ - неотрицательная и четная для любого цикла C на T. Доказательство теоремы проведем индукцией по параметру $\eta(T,\mu)=|T|+\Sigma(\mu(e): e\in[T])$.

1) Если $\mu[xy]=0$ для некоторого ребра $[xy]\in[T]$, то задача сводится к задаче $\Sigma(T',CS_{U'},\mu')$, для которой $\eta(T',\mu') < \eta(T,\mu)$. Здесь T' образуется из T отождествлением вершин x и y ($CS_{U'}$ и μ' определяются естественным образом).

2) Пусть $\mu(e)>0$ для всех $e\in[T]$, и пусть $\alpha\in R_+^{CS_U}$ - оптимальное решение задачи $\Sigma(T,CS_U,\mu)$. Согласно теореме 2.I,

$$\lambda^\alpha(u)=\mu(u)\ (=\ell(u)) \text{ для всех } u\in U. \qquad (8.5)$$

Кроме того, ввиду леммы 2.I, можно считать, что множество $CS^+ = \{A\in CS_U: \alpha_A>0\}$ - параллельное. Выберем минимальное по включению множество A^* среди всех $A\in CS^+$ и их дополнений $T\setminus A$. Без потери общности, можно считать, что $A^*\in CS^+$. Из минимальности A^*, положительности μ и (8.5) следует $|A^*|=1$. Пусть, для определенности, $A^*=\{s\}$, $U\cap[A^*,T\setminus A^*]=\{[st]\}$. Положим $\mu'=\mu-\rho^T_{A^*}$. Надо доказать, что величина $\Delta(\mu',C)$ - неотрицательная и четная для любого цикла C на T. Тогда, поскольку $\eta(T,\mu')<\eta(T,\mu)$, задача $\Sigma(T,CS_U,\mu')$ имеет целочисленное оптимальное решение α' (удовлетворяющее $\lambda^{\alpha'}(u)=\mu'(u)$, $u\in U$), и требуемое решение α^* для $\Sigma(T,CS_U,\mu)$ определяется как $\alpha^*_{A^*}=\alpha'_{A^*}+1$, $\alpha^*_B=\alpha'_B$ - для остальных B в CS_U. Пусть C - произвольный цикл на T. Четность $\Delta(\mu',C)$ - очевидна. Предположим, что $\Delta(\mu',C)<0$. Тогда C содержит вершину s, и $|E_C\cap[A^*,T\setminus A^*]|=2$. Следовательно, $\Delta(\mu',C)=\Delta(\mu,C)-2$, и из неотрицательности и четности $\Delta(\mu,C)$ получаем $\Delta(\mu,C)=0$. Из $\Delta(\mu',C)<0$ следует $[st]\notin E_C$, таким образом, $E_C\cap[A^*,T\setminus A^*]\subseteq[T]\setminus U$. Но из $\Delta(\mu,C)=0$ и (8.5) вытекает $|E_C\cap U\cap[A,T\setminus A]|=|(E_C\setminus U)\cap[A,T\setminus A]|$ для всех $A\in CS^+$. Противоречие. $\square$

<u>Замечание 8.3</u>. Данное доказательство теоремы 8.2 - неконструктивное. Однако автору известен алгоритм полиномиальной от $|V|$ трудоемкости, который для произвольных V,U, $\ell\in R_+^{[V]}$ либо строит оптимальное решение задачи $\Sigma(V,CS_U,\ell)$ (являющееся целочисленным в условиях теоремы 8.2), либо находит цикл C, для которого $\Delta(\ell,C)<0$. В обосновании этого алгоритма теорема 2.I не используется.

Вернемся теперь к общей задаче $\Sigma(V,CS_U,\ell)$. К ней сводится задача об оптимальном устранении отрицательных циклов во взвешенном графе, состоящая в следующем. Пусть $G=(V,E)$ - неориентированный граф, $\ell'\in R^E$ и $U=\{u\in E: \ell'(u)<0\}$. Требуется найти такие числа $\{\varepsilon(u): u\in U',\ 0\leqslant\varepsilon(u)\leqslant -\ell'(u)\}$, чтобы величина $\varepsilon(U')=\sum(\varepsilon(u): u\in U')$ была минимальной, и для любого цикла C графа G выполнялось $\ell''_C\geqslant 0$, где $\ell''(e)=\ell'(e)+\varepsilon(e)$ $(e\in U')$ и $\ell''(e)=\ell'(e)$ $(e\in E\setminus U')$. Положим $\ell(e)=\ell'(e)$ для $e\in E\setminus U'$, $\ell(e)=-\ell'(e)$ для $e\in U'$ и $\ell(e)\geqslant\sum(|\ell'(e')|: e'\in E)$ для $e\in[V]\setminus E$. Пусть $\alpha:]V,CS_{U'}[\to\mathbb{R}_+$ – оптимальное решение задачи $\Sigma(V, CS_{U'},\ell)$. Используя теорему 2.I, нетрудно показать, что $\varepsilon(u)=\ell(u)-\lambda^{\alpha}(u)$ $(u\in U')$ – требуемое решение указанной задачи.

Следующий пример показывает, что минимальная дробность оптимального решения задачи $\Sigma(V,CS_U,\ell)$ может быть как угодно большой. Рассмотрим граф $G=(T,E)$ с множеством вершин $T=\{s_1,\ldots,s_k,t_1,\ldots t_k\}$, изображенный на рис. 8.2а. Положим $U=\{[t_i t_{i+1}],[t_i s_{i+1}]: i=1,\ldots,k-1\}\cup\{[s_1 t_1]\}$ и $\ell(e)=1$ для $e\in E$, $\ell(e)\geqslant 2k$ для $e\in[T]\setminus E$. Нетрудно видеть, что CS_U состоит из множеств $A_i=\{s_i\}$ $(i=1,\ldots,k)$, $B_j=\{t_j,\ldots,t_k,s_{j+1},\ldots,s_k\}$ $(j=2,\ldots,k)$ и их дополнений до T (см. рис. 8.2б). Можно показать, что задача $\Sigma(T,CS_U,\ell)$ имеет "единственное" оптимальное решение α, а именно, $\alpha_{A_i}+\alpha_{\bar A_i}=\alpha_{B_i}+\alpha_{\bar B_i}=(2^{k-i+1}-(-1)^{k-i+1})/3\cdot 2^{k-i+1}$ для каждого $i\geqslant 2$. Оптимальность α следует из того, что функция w, определенная как $w[s_i s_{i+1}]=w[s_i t_{i+1}]=(2^i-(-1)^i)/3\cdot 2^i$ $(i=1,\ldots,k-1)$, $w[s_k t_k]=(2^k+(-1)^{k-1})/3\cdot 2^{k-1}$ и $w(e)=0$ – для остальных e в $[T]$, удовлетворяет $w[A_i,\bar A_i]=w[B_j,\bar B_j]=1$ для всех i,j и $\|\alpha\|=\ell\cdot w$ (см. следствие 3.3). Отметим также тот факт, что величина имеет дробность 2^{-k+1}.

Отсюда следует, в частности, что задача об оптимальном устранении отрицательных циклов графа имеет неограниченную дробность решения.

8.4. Пусть $CS\subseteq]T[$ – схема из примера 3 в 8.I. Задача $\Sigma(V,CS,\ell)$ с такой схемой рассматривалась в работах [24,25] (в [24] она возникла как двойственная к известной задаче "о китайском почтальоне"). В этих работах показывалось, что при $\ell\in\mathbb{Z}_+^{[V]}$ задача имеет полуцелочисленное оптимальное решение.

Поскольку указанная схема CS – 2-полная, ввиду леммы 8.1, достаточно рассмотреть "предзадачу" $\Sigma(T,CS,\mu)$ $(\mu=\mu_{\ell}|[T])$. Нам известен алгоритм трудоемкости $O(P(|T|)\mu(T))$ (где $P(n)$ – некоторый полином), решающий эту задачу для произвольных метрик $\mu\in\mathbb{Z}_+^{[T]}$. Этот алгоритм устроен более просто, чем алгоритм в [24], и из него вытекает следующая теорема.

Теорема 8.3. Пусть $|T|$ – четно, $CS=\{A\subset T: |A|$ – нечетно$\}$, и пусть $\mu\in\mathbb{Z}_+^{[T]}$ – такая метрика, что величина μ_C – четна для любого цикла C на T. Тогда: (а) задача $\Sigma(T,CS,\mu)$ имеет целочисленное оптимальное решение, (б) $\Sigma^{N,CS}=\min\{\mu(M)\}$, где $N=(T,T,\mu)$ и минимум взят по всем совершенным паросочетаниям M графа $(T,[T])$.

8.5. Сформулируем теорему, описывающую одну серию задач о максимальном мультиразрезе минимальной стоимости класса ОКЦ (см. [4]).

Теорема 8.4. Пусть $CS=\{\{s\}: s\in T\}$ для произвольного $|T|\geqslant 2$. Тогда: (а) схема CS принадлежит $COST$-ОКЦ-классу, (б) если $\ell\in\mathbb{Z}_+^{[V]}$, то задача $COST(V,CS,\ell,a)$ имеет полуцелочисленное оптимальное решение при $|T|\geqslant 3$ и имеет целочисленное оптимальное решение при $|T|=2$.

Как отмечено в [4], эта задача имеет двойственную связь с определенным классом задач об оптимальном расширении потоковых сетей. Доказательство теоремы 8.4 следует из алгоритма решения задачи $COST(V,CS,\ell,a)$ для $\ell,a\in\mathbb{R}_+^{[V]}$ и указанных CS (его описание мы здесь не приводим). Этот алгоритм основан на технике накрывающих сетей, разработанной в работе [7]. Полная характеризация $COST$-ОКЦ-класса нам не известна.

Литература

1. Адельсон-Вельский Г.М., Диниц Е.А., Карзанов А.В. Потоковые алгоритмы. М.: Наука, 1975.
2. Диниц Е.А., Карзанов А.В., Ломоносов М.В. О структуре системы минимальных реберных разрезов графа. – В кн.: Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976, с.290-306.
3. Карзанов А.В. Комбинаторные способы решения разрезных задач о мультипотоках. – В кн.: Комбинаторные методы в потоковых задачах. М.: ВНИИСИ, 1979, вып.3, с.6-69.
4. Карзанов А.В. Об оптимальном расширении потоковых сетей. – В кн.: I Всесоюзное совещание по статистическому и дискретному анализу нечисловой информации, экспертным оценкам и дискретной оптимизации (тезисы докладов). Москва – Алма-Ата, 1981.

5. Карзанов А.В., Ломоносов М.В. Системы потоков в неориентированных сетях. - В кн.: Математическое программирование. Проблемы социальных и экономических систем. Модели исследования операций. М.: ВНИИСИ, 1978, вып. I, с.59-66.

6. Карзанов А.В., Певзнер П.А. Описание класса неразрезных задач о мультипотоках максимальной мощности. - В кн.: Комбинаторные методы в потоковых задачах. М.: ВНИИСИ, 1979, вып. 3, с.70-81.

7. Карзанов А.В. Задача о максимальном мультипотоке минимальной стоимости. - В кн.: Комбинаторные методы в потоковых задачах. М.: ВНИИСИ, 1979, вып. 3, с.138-156.

8. Ломоносов М.В. О системе потоков в сети. - Проблемы передачи информации, 1978, т.13, № 4, с.60-73.

9. Папернов Б.А. Реализуемость многопродуктовых потоков. - В кн.: Исследования по дискретной оптимизации. М.: Наука, 1976, с.230-261.

10. Певзнер П.А. К задаче о двухпродуктовой упаковке разрезов. - В кн.: Прикладная математика и задачи железнодорожного транспорта. М.: МИИТ, вып. 640, 1979.

11. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

12. Fulkerson D.R. Blocking polyhedra, in: Graph Theory and Its Applications (Harris B., ed., Academic Press, N.Y., 1970) 93-112.

13. Hu T.C. Multi-commodity network flows, Oper. Res. 11(1963) 344-360.

14. Hu T.C. Two-commodity cut-packing problem, Math. Programming 4(1973) 108-109.

15. Iri M. On an existension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multi-commodity flows, J. Oper. Res. Soc. Japan. 13(1970/71) 129-135.

16. Lehman A. On the width-length inequality, Math. Programming 17(1979) 403-417.

17. Lomonosov M.V. Multiflow feasibility depending on cuts, Graph Theory Newsletter 9(1979) No.1 p.4.

18. Lomonosov M.V. The locking property of multiflows, Graph Theory Newsletter 9(1979) No.1 3-4.

19. Onaga K. and Kakusho O. On feasibility conditions of multicommodity flow in networks, IEEE Trans. on Circuit Theory CT-18(1971) No.4 425-429.

20. Robacker J.T. Min-max theorems on shortest chains and disjunct cuts of a network, RAND Corporation, Research Memorandum RM-1660, 1956.

21. Seymour P.D. A two-commodity cut theorem, Discrete Mathematics 23(1978) 177-181.

22. Seymour P.D. Sums of circuits, in: Graph Theory and Related Topics (Academic Press, N.Y., 1978) 341-355.

23. Seymour P.D. Four-terminus flows, Networks 10(1980) 79-86.

24. Edmonds J. and Jonson E. Matching, Euler tours and chinese postman, Math. Programming 5(1973) 88-124.

25. Lovasz L. 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 26(1975) No.3-4 433-444.

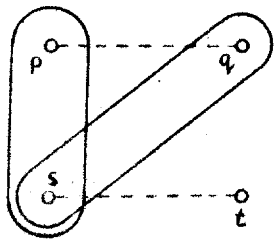

Рис. 2.I

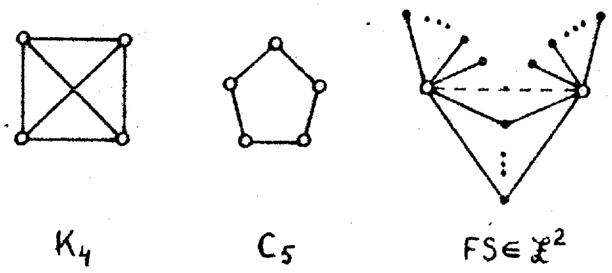

Рис. 2.2

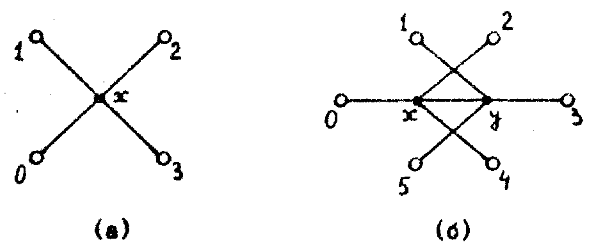

Рис. 4.I

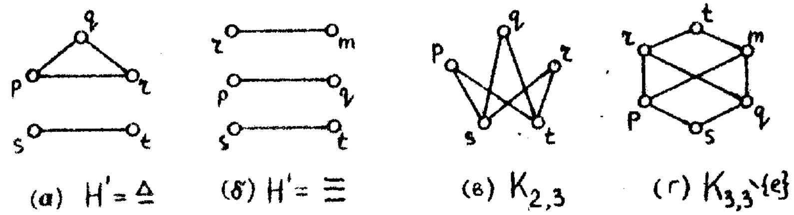

Рис. 5.I

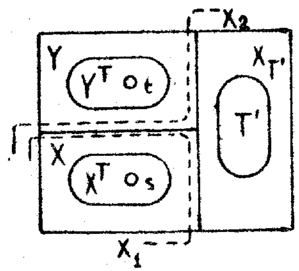

Рис. 6.I

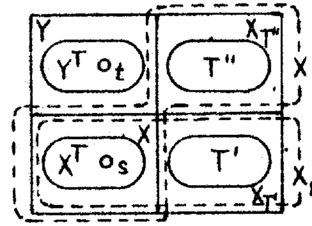

Рис. 6.2

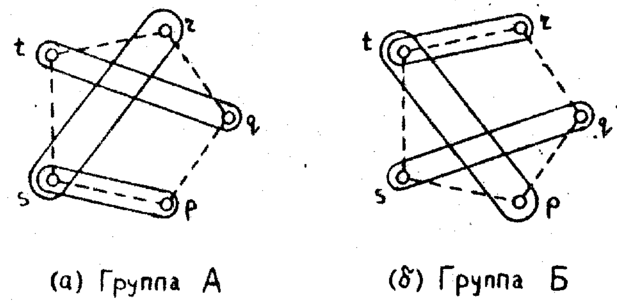

Рис. 6.3

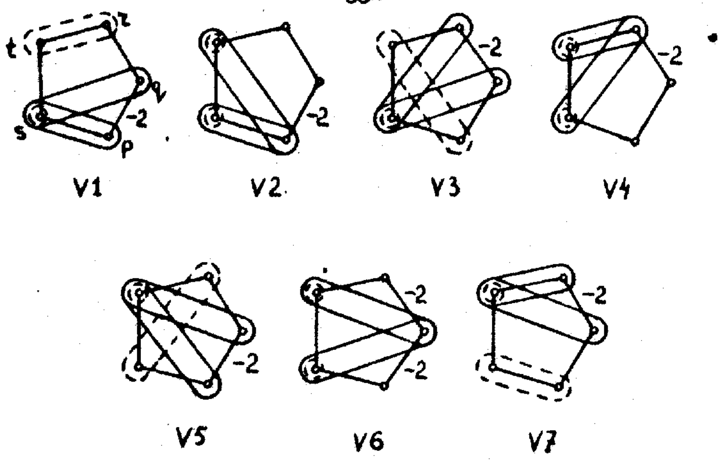

Рис. 6.4

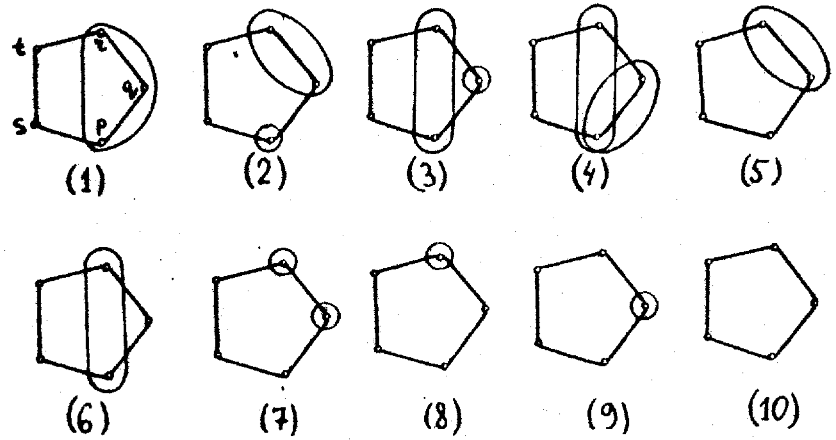

Рис. 6.5

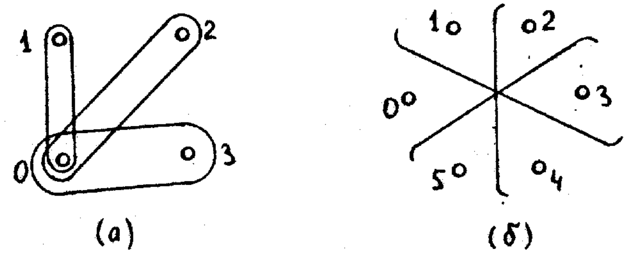

Рис. 7.1

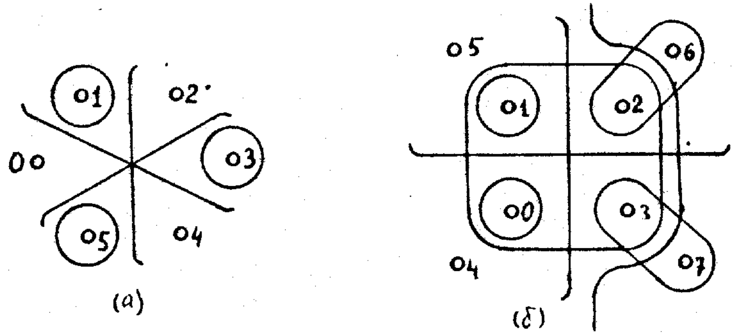

Рис. 8.1

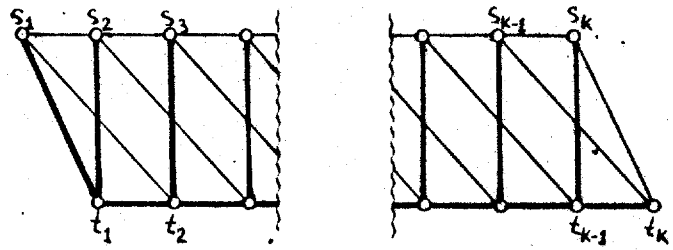

Рис. 8.2